TD – AL6

Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

Applications directes du cours

ADC 1 (Méthode 1) Les ensembles décrits ci-dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace E ? Justifier.

1. $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0\}$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
2. $F_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 3y + z = 0\}$ dans $E = \mathbb{R}^4$.
3. $F_3 = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 2z = 0 \text{ et } 3x - y + z = 0\big\}$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
4. $F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 1\}$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
5. $F_5 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + 2y - z + t = 0\}$ dans $E = \mathbb{R}^4$.

ADC 2 (Méthode 2) En utilisant la méthode 2 montrer que F_1, F_2 et F_3 sont des sous-espaces vectoriels et en déterminer une famille génératrice.

ADC 3 (Méthode 3) Montrer que $F_6 = \{(a + b, a - 2b, 3b - a), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une famille génératrice.

ADC 4 (Méthode 4) Montrer que $\big((1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\big)$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

ADC 5 (Méthode 5) Montrer que $\big((1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\big)$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.

ADC 6 (Méthode 5) Les familles suivantes des $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ou liées ?

1. $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1)$;
2. $u_1 = (0, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (1, 1, 1)$;
3. $u_1 = (0, 1, -1)$, $u_2 = (1, 0, -1)$, $u_3 = (1, -1, 0)$;
4. $u_1 = (1, 1, -1)$, $u_2 = (1, -1, 1)$, $u_3 = (-1, 1, 1)$, $u_4 = (1, 1, 1)$.

ADC 7 (Méthode 6) Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels et en déterminer une base.

1. $G_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0\}$;
2. $G_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0, x + 2y + 3z + 4t = 0\}$;
3. $G_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y = 3z\}$;
4. $G_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = y + z = z + t = t + x = 0\}$;

ADC 8 (Méthode 7) On considère les quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (0, 0, 3)$, $u_3 = (1, 2, 3)$ et $u_4 = (-2, -4, 1)$. Déterminer une base de $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

ADC 9 (Méthode 8) Montrer que $\big((1, 0, 1), (2, 1, 0), (1, 1, 1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

ADC 10 (Méthode 9) On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (0, 0, 3)$. Soit $G = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2)$. Déterminer une équation cartésienne de G.

Exercices

Exercice 1 On considère les vecteurs $v_1 = (1, 4, 1)$ et $v_2 = (-1, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Soit $F = \{(x, y, z) \mid 3x - 2y + 5z = 0\}$. Les vecteurs v_1 et v_2 appartiennent-ils à F ?
2. Soit $G = \text{Vect}(u_1, u_2)$ avec $u_1 = (1, -1, -1)$ et $u_2 = (-6, 1, 4)$. Les vecteurs v_1 et v_2 appartiennent-ils à G ?
3. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
4. Montrer que $G \subset F$.

Exercice 2 Soient

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\}$$

$$G = \{(b - 2a, a + 2b, a + b) \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$H = \text{Vect}\Big((1, 5, 1) \ , \ (2, 1, -1) \ , \ (-1, 4, 2) \Big).$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.
2. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.
3. Déterminer une base de H.
4. Déterminer une équation cartésienne définissant G.
5. Déterminer une base de $F \cap G$.
6. Démontrer que $H = F$.

Exercice 3 On considère dans $\mathbb{R}^3$: $u_1 = (1, 0, 1)$ $u_2 = (0, 1, 0)$ $u_3 = (1, 1, 0)$ et $u_4 = (3, 0, 2)$.

1. Déterminer une base des sous-espaces vectoriels suivants :

$$E_1 = \text{Vect}\,(u_1, u_2, u_3, u_4) \quad ; \quad E_2 = \text{Vect}\,(u_1, u_2) \quad ; \quad E_3 = \text{Vect}\,(u_3, u_4) \quad ; \quad E_4 = \text{Vect}(u_1)$$

2. Montrer que $E_1 = \mathbb{R}^3$.
3. Déterminer un système d'équations linéaires définissant E_2, puis E_3.
   Vérifier que les vecteurs u_1 et u_2 sont bien solutions des équations de E_2. Faire de même pour E_3.
4. Déterminer une base de $E_5 = E_2 \cap E_3$.