TD AL6 : Corrigé des Exercices

Exercice 1

1) $v_1 = (1, 4, 1)$. $3\times 1 - 2\times 4 + 5\times 1 = 3 - 8 + 5 = 0$ donc $v_1 \in F$

$v_2 = (-1, 0, 1)$. $3\times(-1) - 2\times 0 + 5\times 1 = -3+5 = 2 \neq 0$ donc $v_2 \notin F$

2) $u \in G \iff$ il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $u = au_1 + bu_2$.

* Résolvons $au_1 + bu_2 = v_1$.

$$au_1 + bu_2 = v_1 \iff \begin{cases} a - 6b = 1 \\ -a + b = 4 \\ -a + 4b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a - 6b = 1 \\ -5b = 5 \\ -2b = 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} a = -5 \\ b = -1 \end{cases}$$

Donc $v_1 = -5u_1 - u_2 \in G$

* $$au_1 + bu_2 = v_2 \iff \begin{cases} a - 6b = -1 \\ -a + b = 0 \\ -a + 4b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a - 6b = -1 \\ -5b = -1 \\ -2b = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a - 6b = -1 \\ b = \frac{1}{5} \\ b = 0 \end{cases} \quad \text{impossible}$$

Il n'y a pas de solution donc $v_2 \notin G$.

3) • Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$F \subset \mathbb{R}^3$. $0_{\mathbb{R}^3} \in F$ car $3\times 0 - 2\times 0 + 5\times 0 = 0$.

Soient $u = (x, y, z) \in F$, $v = (x', y', z') \in F$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$au + bv = (ax + bx',\ ay + by',\ az + bz') = (X, Y, Z)$$

$$3X - 2Y + 5Z = 3(ax + bx') - 2(ay + by') + 5(az + bz')$$

$$= a\underbrace{(3x - 2y + 5z)}_{\substack{=0 \\ \text{car } u \in F}} + b\underbrace{(3x' - 2y' + 5z')}_{\substack{=0 \\ \text{car } v \in F}} = 0$$

Donc $au + bv \in F$.

Ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

4) Montrons que $G \subset F$ avec $G = \text{Vect}(u_1, u_2)$.

D'après une propriété du cours, il suffit de montrer que

$$u_1 \in F \quad \text{et} \quad u_2 \in F$$

$u_1 \in F$ car $3 \times 1 - 2 \times (-1) + 5 \times (-1) = 3 + 2 - 5 = 0$

$u_2 \in F$ car $3 \times (-6) - 2 \times 1 + 5 \times 4 = -18 - 2 + 20 = 0$

Puisque F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$,

$$G = \text{Vect}(u_1, u_2) \subset F.$$

Autre méthode

Soit $u \in G$. On a
$$\begin{aligned} u &= a u_1 + b u_2 \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R} \\ &= (a - 6b, -a + b, -a + 4b) \\ &= (x, y, z). \end{aligned}$$

Montrons que $u \in F$.

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 5z &= 3(a - 6b) - 2(-a + b) + 5(-a + 4b) \\ &= 3a - 18b + 2a - 2b - 5a + 20b \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $u \in F$.

Ainsi $G \subset F$.

Exercice 2

1) . $F \subset \mathbb{R}^3$

. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$u \in F \iff 2x - y + 3z = 0 \iff y = 2x + 3z$$

$$\iff u = (x,\ 2x + 3z,\ z)$$

$$\iff u = x u_1 + z u_2 \quad \text{avec} \quad u_1 = (1, 2, 0),\ u_2 = (0, 3, 1)$$

$$\iff u \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$$

Donc $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par (u_1, u_2).

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$$a u_1 + b u_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} a = 0 \\ 2a + 3b = 0 \\ b = 0 \end{cases} \iff a = b = 0$$

Donc (u_1, u_2) est libre et c'est une base de F.

2) $G \subset \mathbb{R}^3$

$G = \mathrm{Vect}(u_3, u_4)$ avec $u_3 = (-2, 1, 1)$ et $u_4 = (1, 2, 1)$

Donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par (u_3, u_4).

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$$a u_3 + b u_4 = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} -2a + b = 0 \\ a + 2b = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3b = 0 \\ b = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \iff a = b = 0$$

Donc (u_3, u_4) est libre et c'est une base de G.

3) Notons $v_1 = (1, 5, 1)$, $v_2 = (2, 1, -1)$ et $v_3 = (-1, 4, 2)$.

(v_1, v_2, v_3) est génératrice de H. Est-elle libre ?

$$a v_1 + b v_2 + c v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} a + 2b - c = 0 \\ 5a + b + 4c = 0 \\ a - b + 2c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + 2b - c = 0 \\ -9b + 9c = 0 \\ -3b + 3c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + 2b - c = 0 \\ -b + c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + c = 0 \\ -b + c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = -c \\ b = c \end{cases}$$

(v_1, v_2, v_3) est liée.

- Avec $c = 1$, $\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$ on a $-v_1 + v_2 + v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

  Donc $v_3 = v_1 - v_2$

  Donc $H = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$: (v_1, v_2) est génératrice de H

- Avec $c = 0$.

  $a v_1 + b v_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

Donc (v_1, v_2) est libre, c'est une base de H.

4) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

(E) $(b - 2a, a + 2b, a + b) = u \iff \begin{cases} -2a + b = x \\ a + 2b = y \\ a + b = z \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} 3b = x + 2z \\ b = y - z \\ a + b = z \end{cases}$$

- Si $x + 2z \neq 3(y - z)$, il n'y a pas de solution.
- Si $x + 2z = 3(y - z)$, il y a une solution

$$\begin{cases} b = y - z \\ a = z - (y - z) \end{cases}$$

Or $u \in G \iff$ l'équation (E) a au moins une solution

$$\iff x + 2z = 3(y - z)$$

$$\iff x - 3y + 5z = 0$$

5) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$u \in F \cap G \iff \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 5y - 7z = 0 \\ x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = \frac{7}{5} z \\ x = -\frac{4}{5} z \end{cases}$$

$$\iff u = z\left(-\frac{4}{5}, \frac{7}{5}, 1\right)$$

$$\iff u \in \text{Vect}(u_5) \quad \text{avec} \quad u_5 = \left(-\frac{4}{5}, \frac{7}{5}, 1\right)$$

$F \cap G = \text{Vect}(u_5)$ donc (u_5) est génératrice de $F \cap G$.

Elle est libre car $u_5 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ donc c'est une base de $F \cap G$.

6) On cherche une équation cartésienne de $H = \text{Vect}(v_1, v_2)$.

$$av_1 + bv_2 = (x, y, z) \iff \begin{cases} a + 2b = x \\ 5a + b = y \\ a - b = z \end{cases} \iff \begin{cases} a + 2b = x \\ b = \frac{y - 5x}{-9} \\ b = \frac{z - x}{-3} \end{cases}$$

Si $\frac{y - 5x}{-9} \neq \frac{z - x}{-3}$, il n'y a pas de solution

Sinon, on a une solution $\begin{cases} a = x - 2\left(\frac{y - 5x}{-9}\right) \\ b = \frac{y - 5x}{-9} \end{cases}$

Donc $u = (x, y, z) \in H \iff \frac{y - 5x}{-9} = \frac{z - x}{-3}$

$$\iff 2x - y + 3z = 0$$

$$\iff u \in F$$

Donc $H = F$.

<u>Autres méthodes:</u>

- Montrer que (v_1, v_2) est génératrice de F (reformulation de $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$)

<u>ou</u> - Double-inclusion.

Exercice 3

1) * $E_1 = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4) \subset \mathbb{R}^3$

(u_1, u_2, u_3, u_4) est génératrice de E_1. Est-elle libre ?

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$a u_1 + b u_2 + c u_3 + d u_4 = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + c + 3d = 0 \\ b + c = 0 \\ a + 2d = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} c + d = 0 \\ b + c = 0 \\ a + 2d = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} c + d = 0 \\ b - d = 0 \\ a + 2d = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = -d \\ b = d \\ a = -2d \end{cases} \qquad 1 \text{ paramètre} : d.$$

La famille est liée. Posons $d = 1$. et $\begin{cases} c = -d = -1 \\ b = d = 1 \\ a = -2d = -2 \end{cases}$

On a :

$$-2u_1 + u_2 - u_3 + u_4 = (0,0,0)$$

$$u_4 = 2u_1 - u_2 + u_3$$

Donc on peut supprimer u_4 : $\boxed{E_1 = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)}$

De plus

$$a u_1 + b u_2 + c u_3 = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$ car c'est le système précédent avec $d = 0$.

Donc (u_1, u_2, u_3) est libre et génératrice de E_1 : c'est une base de E_1.

* $E_2 = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.

(u_1, u_2) est génératrice de E_2 et libre car c'est une partie de (u_1, u_2, u_3). Donc c'est une base de E_2.

* $E_3 = \text{Vect}(u_3, u_4)$.

$$au_3 + bu_4 = (0,0,0) \iff \begin{cases} a + 3b = 0 \\ a = 0 \\ 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Donc (u_3, u_4) est libre et génératrice de E_3 : c'est une base de E_3.

* $E_4 = \text{Vect}(u_1)$.

(u_1) est libre car elle contient un seul vecteur, qui est non nul et elle est génératrice de E_4 donc c'est une base de E_4.

2) $E_1 = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$

$E_1 = \mathbb{R}^3 \iff \text{Vect}(u_1, u_2, u_3) = \mathbb{R}^3$

$\iff (u_1, u_2, u_3)$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

* $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$

* Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = u \iff \begin{cases} a + c = x \\ b + c = y \\ a = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c = x - z \\ b = y - x + z \\ a = z \end{cases}$$

$\forall u \in \mathbb{R}^3$, $au_1 + bu_2 + cu_3 = u$ a au moins une solution

donc (u_1, u_2, u_3) est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Ainsi $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3) = E_1$

3) * Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$u \in E_2 \iff au_1 + bu_2 = u$ a au moins une solution.

or

$$au_1 + bu_2 = u \iff \begin{cases} a = x \\ b = y \\ a = z \end{cases}$$

→ si $x = z$, il y a au moins une solution
→ sinon, il n'y a pas de solution.

Donc $\boxed{u \in E_2 \iff x = z.}$

* $u \in E_3 \iff au_3 + bu_4 = u$ a au moins une solution.

Or

$$au_3 + bu_4 = u \iff \begin{cases} a + 3b = x \\ a = y \\ 2b = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y \\ a = y \\ b = \frac{1}{2}z \end{cases}$$

si $\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y = \frac{1}{2}z$, il y a au moins une solution

sinon, il n'y a pas de solution.

Donc $u \in E_3 \iff \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y = \frac{1}{2}z$

$$\boxed{u \in E_3 \iff 2x - 2y - 3z = 0}$$

3) . Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$u \in E_2 \cap E_3 \iff \begin{cases} u \in E_2 \\ u \in E_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x - z = 0 \\ 2x - 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - z = 0 \\ -2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = z \\ y = -\frac{1}{2}z \end{cases}$$

$$\iff u = \left(z, -\tfrac{1}{2}z, z\right)$$

$$\iff u = z\underbrace{\left(1, -\tfrac{1}{2}, 1\right)}_{v_1}$$

$$\iff u \in \mathrm{Vect}(v_1)$$

Donc $E_2 \cap E_3 = \mathrm{Vect}(v_1)$

$v_1 \neq (0,0,0)$ donc (v_1) est libre et génératrice de $E_2 \cap E_3$

donc c'est une base de $E_2 \cap E_3$.