TD AL6 : Corrigé des AOC

AOC 1

1). $F_1 \subset \mathbb{R}^3$

. $(0,0,0) \in F_1$ car $0+0-2\times 0 = 0$

. Soient $u = (x,y,z) \in F1$, $v = (x',y',z') \in F_1$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

$$au + bv = (\underbrace{ax + bx'}_{X}, \underbrace{ay + by'}_{Y}, \underbrace{az + bz'}_{Z})$$

On a : $X + Y - 2Z = ax + bx' + ay + by' - 2az - 2bz'$

$$= a\underbrace{(x+y-2z)}_{\substack{=0 \text{ car} \\ u \in F_1}} + b\underbrace{(x'+y'-2z')}_{=0 \text{ car } v \in F_1}$$

$$= 0$$

Donc $au + bv \in F_1$.

<u>Conclusion</u> : F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2) * $F_2 \subset \mathbb{R}^4$

* $0_{\mathbb{R}^4} = (0,0,0,0) \in F_2$ car $2\times 0 + 3\times 0 + 0 = 0$.

* Soient $u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, $v = (x', y', z', t') \in \mathbb{R}^4$.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$$au + bv = (\underbrace{ax + bx'}_{X}, \underbrace{ay + by'}_{Y}, \underbrace{az + bz'}_{Z}, \underbrace{at + bt'}_{T})$$

$$2X + 3Y + Z = 2(ax + bx') + 3(ay + by') + (az + bz')$$

$$= a\underbrace{(2x + 3y + z)}_{=0 \text{ car } u \in F_2} + b\underbrace{(2x' + 3y' + z')}_{=0 \text{ car } v \in F_2}$$

$$= 0$$

Donc $au + bv \in F_2$.

Ainsi F_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

3) . $F_3 \subset \mathbb{R}^3$

. $(0,0,0) \in F_3$ car $0+2\times 0+2\times 0=0$ et $3\times 0-0+0=0$

. Soient $u=(x,y,z)\in F_3$, $v=(x',y',z')\in F_3$ et $a,b\in\mathbb{R}$.

$$au+bv = (\underbrace{ax+bx'}_{X}, \underbrace{ay+by'}_{Y}, \underbrace{az+bz'}_{Z})$$

on a : $X+2Y+2Z = ax+bx'+2ay+2by'+2az+2bz'$

$$= a\underbrace{(x+2y+2z)}_{\substack{=0 \text{ car} \\ u\in F_3}} + b\underbrace{(x'+2y'+2z')}_{=0 \text{ car } v\in F_3}$$

$$=0$$

et $3X-Y+Z = 3ax+3bx'-ay-by'+az+bz'$

$$= a\underbrace{(3x-y+z)}_{=0 \text{ car } u\in F_3} + b\underbrace{(3x'-y'+z')}_{=0 \text{ car } v\in F_3}$$

Donc $au+bv\in F_3$

<u>Conclusion</u> : F_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

4) . $F_4 \subset \mathbb{R}^3$.

. $(0,0,0)\notin F_4$ car $0+0-2\times 0=0 \neq 1$.

Donc F_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

5) . $F_5 \subset \mathbb{R}^4$

. Soit $u=(1,0,1,0)\in F_5$ car $1^2+2\times 0-1+0=0$

on a cependant $2u=(2,0,2,0)\notin F_5$ car $2^2+2\times 0-2+0=2\neq 0$.

Donc F_5 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

AL 2

1) $F_1 \subset \mathbb{R}^3$

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$u \in F_1 \iff x + y - 2z = 0$

$\iff x = -y + 2z$

$\iff u = (-y + 2z, y, z)$

$\iff u = y\underbrace{(-1, 1, 0)}_{u_1} + z\underbrace{(2, 0, 1)}_{u_2}$

$\iff u \in \text{Vect}(u_1, u_2)$

Donc $F_1 = \text{Vect}(u_1, u_2)$.

Ainsi → F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

→ (u_1, u_2) est génératrice de F_1

2) . $F_2 \subset \mathbb{R}^4$

. Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$u \in F_2 \iff 2x + 3y + z = 0$

$\iff z = -2x - 3y$

$\iff u = (x, y, -2x - 3y, t)$

$\iff u = x\underbrace{(1, 0, -2, 0)}_{u_1} + y\underbrace{(0, 1, -3, 0)}_{u_2} + t\underbrace{(0, 0, 0, 1)}_{u_3}$

$\iff u \in \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$

Donc $F_2 = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$

Ainsi F_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et

(u_1, u_2, u_3) est génératrice de F_2

3) $F_3 \subset \mathbb{R}^3$.

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$u \in F_3 \iff \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{\iff} \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ -7y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ y + \frac{5}{7} z = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\iff} \begin{cases} x + \frac{4}{7} z = 0 \\ y + \frac{5}{7} z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -\frac{4}{7} z \\ y = -\frac{5}{7} z \end{cases}$$

$$\iff u = \left(-\frac{4}{7} z, -\frac{5}{7} z, z\right)$$

$$\iff u = z \underbrace{\left(-\frac{4}{7}, -\frac{5}{7}, 1\right)}_{u_1}$$

$$\iff u \in \mathrm{Vect}(u_1)$$

Donc $F_3 = \mathrm{Vect}(u_1)$. Ainsi F_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

et (u_1) est génératrice de F_3.

ADC 3

. $F_6 \subset \mathbb{R}^3$

. $(a+b, a-2b, 3b-a) = a \underbrace{(1, 1, -1)}_{u_1} + b \underbrace{(1, -2, 3)}_{u_2}$

Donc $F_6 = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.

Ainsi F_6 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

et F_6 est engendré par (u_1, u_2).

ADC 4

1) Soit $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (1,1,0)$ et $u_3 = (0,1,1)$.

* $u_1 \in \mathbb{R}^3$, $u_2 \in \mathbb{R}^3$, $u_3 \in \mathbb{R}^3$

* Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$a u_1 + b u_2 + c u_3 = u \iff \begin{cases} a + b = x \\ b + c = y \\ a + c = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + b = x \\ b + c = y \\ -b + c = z - x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + b = x \\ b + c = y \\ -2b = z - x - y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \\ c = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \\ b = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z \end{cases}$$

$\forall u \in \mathbb{R}^3$, $a u_1 + b u_2 + c u_3 = u$ a au moins une solution

donc (u_1, u_2, u_3) est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

ADC 5

Notons $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (1,1,0)$ et $u_3 = (0,1,1)$.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$a u_1 + b u_2 + c u_3 = (0,0,0) \iff \begin{cases} a + b = 0 \\ b + c = 0 \\ a + c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + b = 0 \\ b + c = 0 \\ -b + c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + b = 0 \\ b + c = 0 \\ -2b = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Donc (u_1, u_2, u_3) est libre.

ADC 6

1) Soient $a, b \in \mathbb{R}$

$$a u_1 + b u_2 = (0,0,0) \iff \begin{cases} a = 0 \\ a+b = 0 \\ b = 0 \end{cases} \iff a = b = 0$$

Donc (u_1, u_2) est libre

2) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$a u_1 + b u_2 + c u_3 = (0,0,0) \iff \begin{cases} c = 0 \\ b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

Donc (u_1, u_2, u_3) est libre.

3) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$a u_1 + b u_2 + c u_3 = (0,0,0) \iff \begin{cases} b + c = 0 \\ a - c = 0 \\ -a - b = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b + c = 0 \\ a - c = 0 \\ -b - c = 0 \quad (= -L_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b + c = 0 \\ a - c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = -c \\ a = c \end{cases}$$

Il y a une infinité de solutions donc (u_1, u_2, u_3) est liée.

<u>Autre méthode</u> : On peut remarquer directement que

$u_1 + u_3 = u_2$ donc la famille est liée.

4) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$a u_1 + b u_2 + c u_3 + d u_4 = (0,0,0,0) \iff \begin{cases} a + b - c + d = 0 \\ a - b + c + d = 0 \\ -a + b + c + d = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \begin{cases} a + b - c + d = 0 \\ -2b + 2c = 0 \\ 2b + 2d = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + b - c + d = 0 \\ -b + c = 0 \\ b + d = 0 \end{cases}$$

$$\iff_{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 - L_3} \begin{cases} a - b = 0 \\ -b + c = 0 \\ b + d = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = b \\ c = b \\ d = -b \end{cases} \qquad b \in \mathbb{R}$$

Il y a une infinité de solutions donc la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est liée.

<u>Autre méthode</u> : on peut remarquer directement que

$u_1 + u_2 + u_3 = u_4$, donc (u_1, u_2, u_3, u_4) est liée.

ADC 7

1) . $G_1 \subset \mathbb{R}^3$

. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$u \in G_1 \iff x - 2y = 0 \iff x = 2y \iff u = (2y, y, z)$

$\iff u = y\underbrace{(2,1,0)}_{u_1} + z\underbrace{(0,0,1)}_{u_2}$

$\iff u \in \text{Vect}(u_1, u_2)$

Donc $G_1 = \text{Vect}(u_1, u_2)$.

Ainsi → G_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

→ (u_1, u_2) est génératrice de G_1

→ Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$a u_1 + b u_2 = (0,0,0) \iff \begin{cases} 2a = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \iff a = b = 0$

Donc (u_1, u_2) est libre.

On en déduit que (u_1, u_2) est une base de G_1.

2) $G_2 \subset \mathbb{R}^4$.

Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$u \in G_2 \iff \begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ 3y + 2z + 5t = 0 \end{cases}$

$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 \times \frac{1}{3} \\ \text{puis} \\ L_1 \leftarrow L_1 + L_2}}{\iff} \begin{cases} x + \frac{5}{3}z + \frac{2}{3}t = 0 \\ y + \frac{2}{3}z + \frac{5}{3}t = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = -\frac{5}{3}z - \frac{2}{3}t \\ y = -\frac{2}{3}z - \frac{5}{3}t \end{cases}$

$\iff u = \left(-\frac{5}{3}z - \frac{2}{3}t, -\frac{2}{3}z - \frac{5}{3}t, z, t\right)$

$\iff u = z\underbrace{\left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 0\right)}_{u_1} + t\underbrace{\left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, 0, 1\right)}_{u_2}$

$\iff u \in \text{Vect}(u_1, u_2)$

Donc $G_2 = \text{Vect}(u_1, u_2)$

Ainsi G_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

et (u_1, u_2) est génératrice de G_2.

De plus, soient $a, b \in \mathbb{R}$

$$au_1 + bu_2 = 0_{\mathbb{R}^4} \iff \begin{cases} -\frac{5}{3}a - \frac{2}{3}b = 0 \\ -\frac{2}{3}a - \frac{5}{3}b = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \iff a = b = 0$$

Donc (u_1, u_2) est libre.

Conclusion : (u_1, u_2) est une base de G_2.

3) $G_3 \subset \mathbb{R}^3$.

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$x = 2y = 3z$

2 égalités

On aurait aussi pu écrire $\begin{cases} x = 2y \\ x = 3z \end{cases}$

$$u \in G_3 \iff \begin{cases} x = 2y \\ 2y = 3z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ z = \frac{2}{3}y \end{cases}$$

$$\iff u = \left(2y, y, \frac{2}{3}y\right)$$

$$\iff u = y\underbrace{\left(2, 1, \frac{2}{3}\right)}_{u_1}$$

$$\iff u \in \mathrm{Vect}(u_1).$$

Ainsi $G_3 = \mathrm{Vect}(u_1)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par (u_1). Comme (u_1) contient un seul vecteur et que $u_1 \neq (0,0,0)$, (u_1) est libre.

C'est donc une base de G_3.

4) $G_4 \subset \mathbb{R}^4$.

Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$

Il y a bien 4 égalités dans F_4.

$$u \in G_4 \iff \begin{cases} x + y = y + z \\ y + z = z + t \\ z + t = t + x \\ t + x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - z = 0 \\ y - t = 0 \\ (-x + z = 0) \quad (= -L_1) \\ x + t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -z - t = 0 \\ y - t = 0 \\ x + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -t \\ y = t \\ x = -t \end{cases}$$

$$\iff u = (-t, t, -t, t)$$

$$\iff u = t\underbrace{(-1, 1, -1, 1)}_{u_1}$$

$u \in G_4 \iff u \in \mathrm{Vect}(u_1)$

Donc $G_4 = \mathrm{Vect}(u_1)$.

Ainsi G_4 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par (u_1). Comme (u_1) contient un seul vecteur et que $u_1 \neq (0,0,0,0)$, (u_1) est libre.

C'est donc une base de G_4.

ADc 8

(u_1, u_2, u_3, u_4) est génératrice de F. Est-elle libre ?

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$a u_1 + b u_2 + c u_3 + d u_4 = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + c - 2d = 0 \\ 2a + 2c - 4d = 0 \quad (2L_1) \\ 3b + 3c + d = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a + c - 2d = 0 \\ 3b + 3c + d = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -c + 2d \\ b = -c - \frac{1}{3} d \end{cases}$$ 2 paramètres c et d

Il y a une infinité de solutions donc (u_1, u_2, u_3, u_4) est liée. On va en extraire une famille libre.

→ Prenons $c = 1$ et $d = 0$ et $\begin{cases} a = -c + 2d = -1 \\ b = -c - 1/3 d = -1 \end{cases}$

On a alors $-u_1 - u_2 + u_3 = (0,0,0)$

$$u_3 = u_1 + u_2$$

$u_3 \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ donc $\boxed{F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_4)}$ (on supprime u_3)

→ Prenons maintenant $d = 1$ et $c = 0$ et $\begin{cases} a = 2 \\ b = -1/3 \end{cases}$

$$2 u_1 - \frac{1}{3} u_2 + u_4 = (0,0,0)$$

$$u_4 = -2u_1 + \frac{1}{3} u_2$$

$u_4 \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ donc $\boxed{F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)}$ (on supprime u_4)

→ Montrons que (u_1, u_2) est libre.

$$a u_1 + b u_2 = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 2a = 0 \\ 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0$$

Donc (u_1, u_2) est libre.

Conclusion : (u_1, u_2) est une base de F

ADC 9

Notons $v_1 = (1,0,1)$
$v_2 = (2,1,0)$
$v_3 = (1,1,1)$

* $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$
* Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$a v_1 + b v_2 + c v_3 = u \iff \begin{cases} a + 2b + c = x \\ b + c = y \\ a + c = z \end{cases}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\iff} \begin{cases} 2b = x - z \\ b + c = y \\ a + c = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} z \\ c = -\frac{1}{2} x + y + \frac{1}{2} z \\ a = \frac{1}{2} x - y + \frac{1}{2} z \end{cases}$$

$\forall u \in \mathbb{R}^3$ il y a une unique solution donc (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

ADC 10

$E \subset \mathbb{R}^3$.

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$u \in E \iff$ l'équation $a u_1 + b u_2 = u$ a au moins une solution.

Or.

$$a u_1 + b u_2 = u \iff \begin{cases} a = x \\ 2a = y \\ 3b = z \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\iff} \begin{cases} a = x \\ 0 = y - 2x \\ b = \frac{1}{3} z \end{cases}$$

Si $y - 2x = 0$, alors il y a au moins une solution $\begin{cases} a = x \\ b = \frac{1}{3} z \end{cases}$

Sinon, il n'y a pas de solution.

Donc $\boxed{u \in E \iff y - 2x = 0}$