Réduction des matrices – Corrigé

Exercice type

Soit f un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ et A sa matrice dans la base canonique.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer les valeurs propres (réelles) de A.
3. Déterminer, par une base, les sous-espaces propres de A, c'est-à-dire les $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ pour λ valeur propre.
4. A est-elle diagonalisable sur $\mathbf{R}$?
5. Si oui, donner une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.
6. Préciser cette matrice diagonale D ainsi qu'une matrice de passage P telle que $D = P^{-1}AP$.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 4 & -4 & 5\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 0\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & -2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & -2 & 2\\ -3 & -3 & 3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & 2 & -3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}8 & -1 & -5\\ -2 & 3 & 1\\ 4 & -1 & -1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}3 & 2 & -2\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 4 & -4 & 5\end{pmatrix}$$

1. $P_A(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$.
2. Les valeurs propres de A sont 1 (de multiplicité 1), 2 (de multiplicité 1) et 3 (de multiplicité 1).
3. $E_1(A) = \{(x,y,z) \mid z = 2y,\ x = -y\} = \operatorname{Vect}\{(-1,1,2)\}$.
   $E_2(A) = \{(x,y,z) \mid z = 4y,\ x = -2y\} = \operatorname{Vect}\{(-2,1,4)\}$.
   $E_3(A) = \{(x,y,z) \mid z = 4y,\ x = -y\} = \operatorname{Vect}\{(-1,1,4)\}$.
4. **Oui**.
   <u>Première méthode</u>
   $\operatorname{mult}_{P_A}(1) + \operatorname{mult}_{P_A}(2) + \operatorname{mult}_{P_A}(3) = \dim \mathbf{R}^3$
   et pour toute valeur propre $\lambda \in \{1,2,3\}$, on a $\operatorname{mult}_{P_A}(\lambda) = 1 = \dim E_\lambda(A)$.
   Donc A est diagonalisable.
   <u>Deuxième méthode</u>
   $\dim E_1(A) + \dim E_2(A) + \dim E_3(A) = \dim \mathbf{R}^3$.
   Donc A est diagonalisable.
5. $\mathcal{B} = \{(-1,1,2),(-2,1,4),(-1,1,4)\}$ est alors une base de $\mathbf{R}^3$ formée de vecteurs propres de A, donc la matrice de f dans cette base est diagonale.
6. $D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix}-1 & -2 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 4\end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

1. $P_A(\lambda) = (-1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$.
2. Les valeurs propres de A sont -1 (de multiplicité 1), 2 (de multiplicité 1) et 3 (de multiplicité 1).
3. $E_{-1}(A) = \text{Vect}\{(0,-1,1)\}$.
   $E_2(A) = \text{Vect}\{(1,1,-4)\}$.
   $E_3(A) = \text{Vect}\{(0,0,1)\}$.
4. **Oui**.
5. $\mathcal{B} = \{(0,-1,1),(1,1,-4),(0,0,1)\}$ est alors une base de $\mathbf{R}^3$ formée de vecteurs propres de A, donc la matrice de f dans cette base est diagonale.
6. $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. $P_A(\lambda) = (-1-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda)$.
2. Les valeurs propres de A sont -1 (de multiplicité 1), 2 (de multiplicité 1) et 4 (de multiplicité 1).
3. $E_{-1}(A) = \text{Vect}\{-1,0,1)\}$.
   $E_2(A) = \text{Vect}\{(-2,-3,2)\}$.
   $E_4(A) = \text{Vect}\{(8,5,2)\}$.
4. **Oui**.
5. $\mathcal{B} = \{(-1,0,1),(-2,-3,2),(8,5,2)\}$ est alors une base de $\mathbf{R}^3$ formée de vecteurs propres de A, donc la matrice de f dans cette base est diagonale.
6. $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 8 \\ 0 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. $P_A(\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda)(-4-\lambda)$.
2. Les valeurs propres de A sont 1 (de multiplicité 1), 3 (de multiplicité 1) et -4 (de multiplicité 1).
3. $E_1(A) = \text{Vect}\{(1,0,3)\}$.
   $E_3(A) = \text{Vect}\{(-3,-2,1)\}$.
   $E_{-4}(A) = \text{Vect}\{(-3,5,1)\}$.
4. **Oui**.
5. $\mathcal{B} = \{(1,0,3),(-3,-2,1),(-3,5,1)\}$ est alors une base de $\mathbf{R}^3$ formée de vecteurs propres de A, donc la matrice de f dans cette base est diagonale.

6. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. $P_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$.
2. La seule valeur propre réelle de A est 1 (de multiplicité 1).
3. $E_1(A) = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\}$.
4. **Non**. A n'est pas diagonalisable car la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut 1 (il n'y a qu'un seul sous-espace propre).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. $P_A(\lambda) = -\lambda(1 - \lambda)^2$.
2. Les valeurs propres de A sont 0 (de multiplicité 1) et 1 (de multiplicité 2).
3. $E_0(A) = \text{Vect}\{(-1, 0, 1)\}$.
   $E_1(A) = \{(x, y, z) \mid x = 0\} = \text{Vect}\{(0, 1, 0), (0, 0, 1\}$.
4. **Oui**.
5. $\mathcal{B} = \{(-1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ est alors une base de $\mathbf{R}^3$ formée de vecteurs propres de A, donc la matrice de f dans cette base est diagonale.
6. $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

1. $P_A(\lambda) = \lambda^2(2 - \lambda)$.
2. Les valeurs propres de A sont 0 (de multiplicité 2) et 2 (de multiplicité 1).
3. $E_0(A) = \{(x, y, z) \mid x + y - z = 0\} = \text{Vect}\{(1, 0, 1), (-1, 1, 0)\}$.
   $E_2(A) = \text{Vect}\{(1, -2, -3)\}$.
4. **Oui**.
5. $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 0), (1, -2, -3)\}$ est alors une base de $\mathbf{R}^3$ formée de vecteurs propres de A, donc la matrice de f dans cette base est diagonale.
6. $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. $P_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$.
2. Les valeurs propres de A sont 1 (de multiplicité 2) et 2 (de multiplicité 1).
3. $E_1(A) = \{(x,y,z) \mid x+y=0\} = \mathrm{Vect}\{(1,-1,0),(0,0,1)\}$.
   $E_2(A) = \mathrm{Vect}\{(-2,1,0)\}$.
4. **Oui**.
5. $\mathcal{B} = \{(1,-1,0),(0,0,1),(-2,1,0)\}$ est alors une base de $\mathbf{R}^3$ formée de vecteurs propres de A, donc la matrice de f dans cette base est diagonale.
6. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

1. $P_A(\lambda) = (1-\lambda)(-1-\lambda)^2$.
2. Les valeurs propres de A sont 1 (de multiplicité 1) et -1 (de multiplicité 2).
3. $E_1(A) = \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}$.
   $E_{-1}(A) = \{(x,y,z) \mid x+y-z=0\} = \mathrm{Vect}\{(-1,0,1),(1,0,1)\}$.
4. **Oui**.
5. $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(-1,1,0),(1,0,1)\}$ est alors une base de $\mathbf{R}^3$ formée de vecteurs propres de A, donc la matrice de f dans cette base est diagonale.
6. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. $P_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(-1-\lambda)$.
2. Les valeurs propres de A sont 1 (de multiplicité 2) et -1 (de multiplicité 1).
3. $E_1(A) = \mathrm{Vect}\{(0,2,1)\}$.
   $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\{(0,0,1)\}$.
4. **Non**. $\dim E_1(A) = 1 \neq 2 = \mathrm{mult}_{P_A}(1)$, donc A n'est pas diagonalisable.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. $P_A(\lambda) = (2-\lambda)(4-\lambda)^2$.
2. Les valeurs propres de A sont 2 (de multiplicité 1) et 4 (de multiplicité 2).
3. $E_2(A) = \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}$.
   $E_4(A) = \mathrm{Vect}\{(1,-1,1)\}$.
4. **Non**.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. $P_A(\lambda) = (1-\lambda)^3$.
2. La seule valeur propre de A est 1 (de multiplicité 3).
3. $E_1(A) = \{(x,y,z) \mid x+y-z=0\} = \mathrm{Vect}\{(-1,1,0),(1,0,1)\}$.
4. **Non**.