Devoir maison

Pour le 5 mars 2012

Exercice : Faire l'étude complète de la fonction f définie par

$$f(x) = x \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

et tracer son graphe.

Corrigé

- **Ensemble de définition :** $D_f = \mathbf{R}^*$.

- **Limites :** Nous poserons au besoin $X = \frac{1}{x}$.
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{X\to 0} \exp(X) = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{X\to 0} \exp(X) = 1$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
  - $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{X\to-\infty} \exp(X) = 0$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = 0$.
  - $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\exp(X)}{X} = +\infty$.

- **Calcul et signe de la dérivée :** Pour tout $x \in \mathbf{R}^*$,

$$f'(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{x}{x^2}\right) = \underbrace{\exp\left(\frac{1}{x}\right)}_{>0} \frac{x-1}{x}.$$

Signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
x		$-$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

- **Variations :** f est croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $[1, +\infty[$ et décroissante sur $]0, 1]$.
  $f(1) = \mathrm{e}$. On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0 ‖ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

- **Branches infinies :**
  - $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$, à droite seulement.
  - $\dfrac{f(x)}{x} = \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$, donc, comme déjà calculé plus haut,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

  $\mathcal{C}_f$ admet au moins une direction asymptotique d'équation $y = x$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Déterminons si on a des asymptotes obliques ou non.

$$f(x) - x = x\exp\left(\frac{1}{x}\right) - x = x\left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right).$$

  Donc,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{X\to 0} \frac{\exp(X) - 1}{X} = 1 \text{ et, de même, } \lim_{x\to-\infty} f(x) - x = 1.$$

  Rq : cette limite fait partie de la liste des limites à connaître sur la fonction exponentielle. Elle provient du fait que exp est dérivable en 0 et donc,

$$\lim_{X\to 0} \frac{\exp(X) - \exp(0)}{X - 0} = \exp'(0).$$

  On en déduit que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

- **(optionnel) À gauche en 0 :** la courbe $\mathcal{C}_f$ vient "s'écraser" sur la gauche de l'axe des ordonnées, à hauteur 0. On peut regarder suivant quelle direction (pente de la tangente) elle s'écrase en étudiant la limite de la dérivée.
  $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x - 1 = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x}\exp\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{X\to-\infty} X\exp(X) = 0$. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x) = 0$: tangente horizontale.

- **Graphe :**