Contrôle continu

9 mars 2012

Corrigé

Exercice 1 : (4 points)

$$\frac{3x^4 - 4\,\mathrm{e}^x + 5\,\mathrm{e}^{3x}}{5x^4 - 4\,\mathrm{e}^{3x}} = \frac{\mathrm{e}^{3x}\left(3\frac{x^4}{\mathrm{e}^{3x}} - 4\,\mathrm{e}^{-2x} + 5\right)}{\mathrm{e}^{3x}\left(5\frac{x^4}{\mathrm{e}^{3x}} - 4\right)} = \frac{3\frac{x^4}{\mathrm{e}^{3x}} - 4\,\mathrm{e}^{2x} + 5}{5\frac{x^4}{\mathrm{e}^{3x}} - 4}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^4}{\mathrm{e}^{3x}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$. Donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4 - 4\,\mathrm{e}^x + 5\,\mathrm{e}^{3x}}{5x^4 - 4\,\mathrm{e}^{3x}} = -\frac{5}{4}.$$

Exercice 2 : (6 points)

1. $f(-1,0) = (-1)^3 \arctan(\mathrm{e}^0 - 1) - 0 = -\arctan(0) = 0.$
2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 \arctan(\mathrm{e}^y - 1) + \dfrac{2y}{x^3}$

   $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x^3\,\mathrm{e}^y}{1 + (\mathrm{e}^y - 1)^2} - \dfrac{1}{x^2}$

Exercice 3 : (12 points)

1. $f(x)$ est une fraction rationnelle, donc définie si et seulement si $x + 2 \neq 0$. $D_f = \mathbf{R}\backslash\{-2\}$.
2. $$f'(x) = \frac{(1-2x)(x+2) - (1 + x - x^2)}{(x+2)^2} = \frac{-x^2 - 4x + 1}{(x+2)^2}$$

   $(x+2)^2 > 0$ sur D_f, donc le signe de $f'(x)$ est aussi celui de $-x^2 - 4x + 1$.
   $\Delta = (-4)^2 + 4 = 20 = (2\sqrt{5})^2$. Les racines de $-x^2 - 4x + 1$ sont

   $$x_1 = -2 - \sqrt{5} \qquad \text{et} \qquad x_2 = -2 + \sqrt{5}.$$

   Le signe de $f'(x)$ est donc donné par

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{5}$		-2		$-2+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	

   f est croissante sur $[-2-\sqrt{5}; -2[$ et sur $]-2; -2+\sqrt{5}]$.
   f est décroissante sur $]-\infty; -2-\sqrt{5}]$ et sur $[-2+\sqrt{5}; +\infty[$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1 + x - x^2}{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty.$
4. $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1 + x - x^2}{(x+2)x} = \dfrac{1 + x - x^2}{x^2 + 2x}$, donc

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + x - x^2}{x^2 + 2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} -1 = -1.$$

   $f(x) - (-x) = f(x) + x = \dfrac{1 + x - x^2}{x+2} + \dfrac{x^2 + 2x}{x+2} = \dfrac{3x+1}{x+2}$, donc

   $$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (-x)) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x+1}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 3 = 3$$

   La droite d'équation $y = -x + 3$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.