Licence biologie — Année universitaire 2011-2012

1ère année, 2eme semestre — Mathématiques

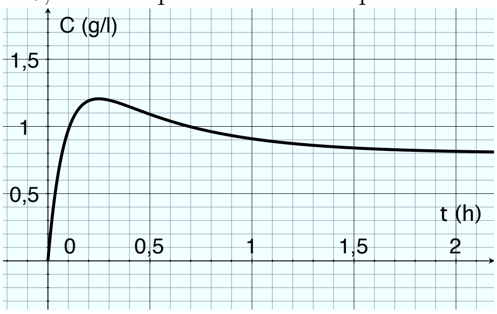
Feuille d'exercices n^{o}1.
Etudes de fonctions.

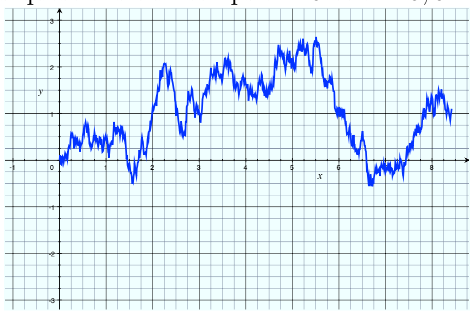
Ensemble de définition

1. Donner le domaine de définition des fonctions suivantes :
   (a) $f : x \mapsto \arctan \dfrac{1-x}{1+x}$ (b) $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{e^x - 1}$ (c) $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x-3)}{e^x-1}$
   (d) $f : x \mapsto (x-1)\sqrt{x^2-4x+3}$ (e) $f : x \mapsto \sqrt{(x-1)(x-2)(e^x-3)}$

Dérivées, sens de variation

2. Le graphe de gauche ci-dessous, représente la variation de la glycémie (concentration de glucose dans le sang en g/l) au cours de temps. Evaluer graphiquement la vitesse de variation de la glycémie au temps $t = 0,2$h ? En quelles unités s'exprime-t-elle ? Mêmes questions aux temps $t = 0$ et $t = 0,5$h.





3. Le graphe de droite ci-dessus représente la position d'un grain de pollen, observé au microscope, au cours du temps (mouvement Brownien). On modélise ce mouvement par une fonction (aléatoire) qui n'est pas dérivable (en aucun point). Dans ce modèle, que peut-on dire de la vitesse instantanée du grain de pollen ?
4. On note f l'application polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = 4\,x^3 - 3\,x - 1.$$
Tracer le tableau de variations de f.

5. Au temps t, une population de bactéries vaut $A\,e^{t/\tau}$ où $A = 10000$ bacteries et $\tau = 16$h sont des constantes. Quel est la *vitesse de croissance* instantanée de la population au temps $t = 0$ (en bactéries par heures) ? au temps $t = 24$h ? au temps $t = \tau$?

Limites et asymptotes

6. Calculer, si elles existent, les limites suivantes :
   (a) $-2x^2 + 2x + 1$ en $+\infty$;
   (b) $\arctan(x^3 - x)$ en $+\infty$ et $-\infty$
   (c) $\dfrac{-x+1}{3x^2+x+1}$ en $+\infty$;
   (d) $x - \sqrt{x}$ en $+\infty$;
   (e) $\frac{3e^{2x}+5e^{4x}}{2e^{3x}-3e^{4x}}$ en $+\infty$.

7. Einstein a montré que la masse d'un corps est fonction de sa vitesse ; si c est la vitesse de la lumière ($c = 300000\,km\,s^{-1}$) et v est la vitesse du corps, la masse de ce corps est
$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$
où v est exprimé en $km\,.\,s^{-1}$ et $0 \leq v < c$.
   (a) Expliquer pourquoi la constante m_0 est la masse du corps au repos.
   (b) Etudier la limite éventuelle de $m(v)$ lorsque v tend vers c.

8. Etudier les branches infinies de la fonction $\frac{\ln x}{x-2}$ aux bornes de son ensemble de définition.

Etude de fonctions, applications diverses

9. La glycémie d'une personne au cours du temps après un repas varie selon la fonction $g(t) = g_0(1 + e^{-2t} - e^{-6t})$ avec $g_0 = 0,8g/l$, t étant le temps depuis le repas exprimé en heures.
   (a) Que vaut la glycémie initiale ? A quel moment est-elle atteinte ?
   (b) Tracer les variations de $g(t)$.
   (c) Quelle est la glycémie maximale ?
   (d) Quelle est la limite de la glycémie quand $t \to \infty$? Quelle est la nature de la branche infinie quand $t \to +\infty$?
10. Etudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3 + 3x^2 - 3}{x^2 - 1}$ et représenter son graphe.
11. Etudier les variations et les branches infinies de la fonction $f(x) = x + \ln(x)$
12. Etudier les variations et les branches infinies de $f(x) = \arctan x^2$.
13. Tout échantillon radioactif se désintègre spontanément de telle sorte que le nombre de noyaux radioactifs présents dans l'échantillon décroît en fonction du temps selon la loi $N = N_0e^{-\lambda t}$ où N_0 est le nombre de noyaux à $t = 0$ et λ une constante caractéristique de l'échantillon.
   (a) Montrer que le temps nécessaire à la désintégration de la moitié des noyaux (appelé période ou demi-vie) est $T = \dfrac{\ln(2)}{\lambda}$. En déduire que l'on peut écrire $N = N_0 2^{-\frac{t}{T}}$.
   (b) Le Polonium 210 a une période $T = 138$ jours. Evaluer le pourcentage de noyaux radioactifs encore présents au bout d'un an.

14. On injecte un médicament par voie intraveineuse à un malade (ici une dose de 200 ml). Un dosage de concentration est effectué à divers instants (l'instant $t = 0$ correspond à la fin de l'injection). On désigne par $C(t)$ la concentration du médicament dans le sang à l'instant t. Après l'injection, la concentration suit les valeurs données dans le tableau ci-dessous (t en heures et C en mg/ml) :

t	0	1	2	4	6	8	12	16	20	24
$C(t)$	11.0	10.2	9.5	8.2	7.0	6.1	4.5	3.4	2.5	1.8

   On montre que la concentration C suit une loi exponentielle :
   $$C(t) = f(t) \text{ où } f(t) = Q\,e^{-\gamma t}$$
   ici γ vaut $75\,.\,10^{-3}$.
   (a) D'après le tableau, que vaut Q ?
   (b) Donnner le sens de variations de f. Est-ce en accord avec les mesures expérimentales ?
   (c) Etudier la limite de f en $+\infty$.
   (d) Tracer la courbe de f.
   (e) On note T l'intervalle de temps nécessaire pour que la concentration baisse jusqu'au tiers de sa valeur à l'instant t, c'est à dire
   $$C(t + T) = C(t)/3.$$
   Vérifier que T ne dépend pas de t et exprimer T en fonction de γ.

Compléments.

15. En biologie, la taille de certaines espèces évolue en fonction du temps selon une 'fonction de Gompertz'
   $$f : t \mapsto k\,e^{-Ae^{-Bt}}.$$
   Etudier la fonction f sur $[0, +\infty[$ et sa courbe (on prendra $k = 6$, $A = 2$, $B = 0.5$).
16. Dans certaines circonstances, une rumeur se répand suivant l'équation
   $$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}}$$
   où $p(t)$ est la proportion de la population au courant de la rumeur au moment t et où a et k sont des constantes positives.
   (a) Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} p(t)$.
   (b) Quelle est la vitesse de la propagation de la rumeur ?
   (c) Dessiner la courbe représentative de p dans le cas $a = 10, k = 0,5$.