Corrigé du contrôle continu n° 2

Exercice 1 — 10 points

1. $P_M(\lambda) = (1-\lambda)(2+\lambda)(1+\lambda)$, donc les valeurs propres sont $1, -2$ et -1.
Pour calculer P_M, essayer de réaliser des opérations sur les colonnes pour faire apparaître un des facteurs du polynôme. Ce que vous pouvez tester :
   (a) Faire la somme des lignes ou des colonnes. Par exemple ici, faire $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$ transforme C_1 en $\begin{pmatrix} 1-\lambda \\ 1-\lambda \\ 1-\lambda \end{pmatrix}$ donc vous pouvez mettre $1-\lambda$ en facteur.
   (b) OU, faire apparaître des zéros. Ici, on peut facilement annuler plusieurs coefficients :
   — $C_2 \leftarrow C_2 + C_3$ transforme C_2 en $\begin{pmatrix} 0 \\ -1-\lambda \\ -1-\lambda \end{pmatrix}$ donc vous pouvez mettre $-1-\lambda$ en facteur.
   — $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ transforme L_3 en $\begin{pmatrix} 0 & 2+\lambda & -2-\lambda \end{pmatrix}$ donc vous pouvez mettre $2+\lambda$ en facteur.
   — $C_1 \leftarrow C_1 - C_3$ transforme C_1 en $\begin{pmatrix} -2-\lambda \\ 0 \\ 2+\lambda \end{pmatrix}$ donc vous pouvez mettre $2+\lambda$ en facteur.

   Après avoir mis un terme en facteur, vous pouvez calculer le déterminant restant avec la formule du cours (cela vous donne un polynôme du second degré, et vous pourrez calculer les racines). Vous avez aussi le droit de continuer les opérations sur les lignes et les colonnes. **Toutefois**, si ces opérations ne mènent à rien (ou si vous ne savez pas quoi faire), calculer directement le déterminant avec la formule du cours. Vous obtiendrez un polynôme de degré 3 : $P_M = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 2$. Vous répondez alors au moins à la question a). Pour trouvez les racines, remarquez que $P_M(1) = 0$ (testez $0, 1, -1$). Donc $P_M(\lambda) = (1-\lambda)(a\lambda^2 + b\lambda + c)$. Vous pouvez ensuite calculer a, b et c par identification des coefficients : $a = 1$, $b = 3$, $c = 2$. Remarque : en fait on voit que $P_M(1) = 0$ et $P_M(-1) = 0$, donc $P_M(\lambda) = (1-\lambda)(1+\lambda)(a\lambda + b)$. Il n'y a que deux coefficients à trouver et on aura directement la forme factorisée.

2. (a) Un vecteur propre de M est un vecteur X de $\mathbf{R}^3$, **non nul**, tel qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ vérifiant $MX = \lambda X$.
   C'est donc un élément non nul de $\mathrm{Ker}(M - \lambda I)$.
   (b) $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc le vecteur $e_1 = (1, 1, 1)$ est propre et la valeur propre associée est 1.
   (c) $\mathrm{Ker}(M + 2I) = \mathrm{Vect}\{(-1, 0, 1)\}$, donc $e_2 = (-1, 0, 1)$ est propre pour la valeur propre -2.
   $\mathrm{Ker}(M + I) = \mathrm{Vect}\{(0, 1, 1)\}$, donc $e_3 = (0, 1, 1)$ est propre pour la valeur propre -1.

3. Dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 — 10 points

1. (a) Écrire $\varphi(x) = -(x+1)\dfrac{1}{1-x}$

(b) $h = y - (-1)$ est au voisinage de 0 quand y est au voisinage de -1.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^y &= \mathrm{e}^{h-1} \\
&= \mathrm{e}^{-1} \cdot \mathrm{e}^h \\
&= \frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{h}{\mathrm{e}} + \frac{h^2}{2\,\mathrm{e}} + h^2\varepsilon(h) \\
&= \frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{y+1}{\mathrm{e}} + \frac{(y+1)^2}{2\,\mathrm{e}} + (y+1)^2\varepsilon(y+1)
\end{aligned}$$

avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

(c) On prend $y = \varphi(x) = -1 - 2x - 2x^2 + x^2\varepsilon_1(x)$ qui est au voisinage de -1.
$(y+1)^2 = 4x^2 + x^2\varepsilon_3(x)$.

$$\begin{aligned}
\exp(\varphi(x)) &= \frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{y+1}{\mathrm{e}} + \frac{(y+1)^2}{2\,\mathrm{e}} + (y+1)^2\varepsilon(y+1) \\
&= \frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{-2x-2x^2}{\mathrm{e}} + \frac{4x^2}{2\,\mathrm{e}} + x^2\varepsilon_2(x) \\
&= \frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{2x}{\mathrm{e}} + x^2\varepsilon_2(x)
\end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x-1)\exp(\varphi(x)) \\
&= (x-1)\left(\frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{2x}{\mathrm{e}} + x^2\varepsilon_2(x)\right) \\
&= -\frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{3x}{\mathrm{e}} - \frac{2x^2}{\mathrm{e}} + x^2\varepsilon_4(x)
\end{aligned}$$

2. (a)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\exp(\varphi(x))} &= \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{2x}{\mathrm{e}} + x^2\varepsilon_2(x)} \\
&= \mathrm{e}\,\frac{1}{1-(2x+x^2\varepsilon_5(x))}
\end{aligned}$$

Posons $u = 2x + x^2\varepsilon_5(x)$, qui est au voisinage de 0. On aura besoin des puissances de u pour calculer le développement à l'ordre 2 en x.
$u^2 = 4x^2 + x^2\varepsilon(x)$
et $u^3 = x^2\varepsilon(x)$, donc est inutile (on peut s'arrêter à u^2). Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\exp(\varphi(x))} &= \mathrm{e}(1 + u + u^2 + x^2\varepsilon(x)) \\
&= \mathrm{e}\left(1 + 2x + 4x^2 + x^2\varepsilon(x)\right) \\
&= \mathrm{e} + 2\,\mathrm{e}\,x + 4\,\mathrm{e}\,x^2 + x^2\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

(b) Posons $h = \frac{1}{x}$, qui est au voisinage de 0 quand x est au voisinage de ∞.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(\frac{1}{h} - 1\right)\exp\left(\frac{1/h+1}{1/h-1}\right) \\
&= \left(\frac{1}{h} - 1\right)\exp\left(\frac{1+h}{1-h}\right) \\
&= \frac{1}{h}(1-h)\left(\mathrm{e} + 2\,\mathrm{e}\,h + 4\,\mathrm{e}\,h^2 + h^2\varepsilon(h)\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}}{h} + \mathrm{e} + 2\,\mathrm{e}\,h + h\varepsilon(h) \\
&= \mathrm{e}\,x + \mathrm{e} + \frac{2\,\mathrm{e}}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$