

INTERROGATION ÉCRITE

Avertissement : les documents, calculatrices et autres dispositifs électroniques sont interdits.

La présentation générale et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des réponses. Le barème est donné à titre indicatif.

Durée 1h.

Exercice 1 (10 points)

On considère une application linéaire f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 dont la matrice relativement à la base canonique \mathcal{C} de \mathbb{R}^3 est la suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1 - a) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice M .

b) En déduire les valeurs propres de M .

2 - a) Rappeler la définition d'un vecteur propre.

b) Vérifier que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M . Quelle est la valeur propre associée ?

c) Calculer un vecteur propre associé à chacune des deux autres valeurs propres de M .

3 - Proposer une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 dans laquelle l'endomorphisme f est représenté par une matrice diagonale D .

Exercice 2 (10 points)

Soit f la fonction réelle de la variable réelle définie par $f(x) = (x - 1) \exp\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)$.

Par commodité, on désigne par φ la fonction réelle de la variable réelle définie par $\varphi(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$.

1 - a) Montrer qu'au voisinage de 0 on a $\varphi(x) = -1 - 2x - 2x^2 + x^2\varepsilon_1(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$.

b) Calculer le développement limité au voisinage de -1 à l'ordre 2 de la fonction exponentielle.

c) En déduire qu'au voisinage de 0 on a $\exp(\varphi(x)) = \frac{1}{e} - \frac{2x}{e} + x^2\varepsilon_2(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$ puis donner le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 2 de f .

2 - a) Calculer le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 2 de : $\exp\left(\frac{x + 1}{1 - x}\right) = \frac{1}{\exp(\varphi(x))}$.

b) En déduire les développements limités à l'ordre 1 de f au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.