Corrigé du contrôle continu n° 1

Le barème est ici donné à titre indicatif. La notation de la copie tient évidemment compte de la clarté de la rédaction et des justifications.

Exercice 1 — 4 points

Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est A :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

1. **(1.5 points : 0,5 méthode, 1 résultat)**
Soient $e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathcal{F} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
Soient a, b et $c \in \mathbb{R}$.

$$a\ e_1 + b\ e_2 + c\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2a + b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ a + b - 2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -3a = 0 & (L1 \leftarrow L1 - L2) \\ a + b + c = 0 & \\ -3c = 0 & (L3 \leftarrow L3 - L2) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Donc $\mathcal{F}$ est une famille libre à 3 éléments. C'est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. **(2.5 points : 1,5 calculs, 1 matrice)**
Quelle est la matrice B associée à f dans cette base ?
On calcule les images de ces vecteurs par f :

$$f(e_1) = -3e_1$$
$$f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$f(e_3) = -6e_3$$

Ainsi, la matrice associée à f dans cette base est :

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 — 10 points

1. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 2y - z = 3x - y - 10z = 0\}$.
   (a) **(2 points : 0,5 pour $(0, 0, 0)$, 1,5 pour $\lambda u + v$)**
   Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.
   Le vecteur $(0, 0, 0)$ est un élément de F puisque ses coordonnées vérifient les équations de F.
   Soient $u = (x, y, z) \in F$, $v = (a, b, c) \in F$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.

On a donc $x+2y-z=3x-y-10z=0$ *et* $a+2b-c=3a-b-10c=0$ *et*

$$\lambda u+v=(\lambda x+a,\lambda y+b,\lambda z+c).$$

Alors

$$(\lambda x+a)+2(\lambda y+b)-(\lambda z+c)=\lambda(x+2y-z)+(a+2b-c)=0$$

et

$$3(\lambda x+a)-(\lambda y+b)-10(\lambda z+c)=\lambda(3x-y-10z)+(3a-b-10c)=0.$$

Donc $\lambda u+v$ *est un élement de* F *et* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbf{R}^3$.

(b) **(3 points : 1,5 point calcul, 0,5 pour famille gen, 0,5 pour libre, 0,5 pour la dimension)**
Déterminer une base et la dimension de F.
Soit $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$.

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in F &\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z &=0\\ 3x-y-10z &=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z &=0\\ -7y-7z &=0 \quad (L2\leftarrow L2-3L1)\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=3z\\ y=-z\end{cases}\\ &\Leftrightarrow (x,y,z)=z(3,-1,1)\end{aligned}$$

Donc le vecteur $e_1=(3,-1,1)$ *engendre* F. *De plus il est non nul donc* $\{e_1\}$ *est libre. C'est donc une base de* F.
La dimension de F *est égale à 1, puisque la base donnée contient 1 élément.*

2. Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ engendré par la famille $\{u_1,u_2,u_3\}$ avec $u_1=(1,2,0)$, $u_2=(2,1,-3)$ et $u_3=(1,1,-1)$.

(a) **(1 point)** Calculer u_1-3u_3.

$$u_1-3u_3=(1,2,0)-3(1,1,-1)=(-2,-1,3)=-u_2.$$

(b) **(2 points : 1 pour génératrice, 1 pour libre)**
En déduire une base de G.
D'après la question précédente, $u_2\in\operatorname{Vect}\{u_1,u_3\}$. *Ainsi*

$$\operatorname{Vect}\{u_1,u_2,u_3\}=\operatorname{Vect}\{u_1,u_3\}.$$

La famille $\{u_1,u_3\}$ *est donc génératrice de* G. *De plus elle est libre puisque* u_1 *et* u_2 *ne sont pas colinéaires. C'est donc une base de* G.

3. **(2 points)**
Montrer que $F\oplus G=\mathbf{R}^3$.
Première méthode : avec des bases. *D'après ce qui précède,* $\{e_1\}$ *est une base de* F *et* $\{u_1,u_3\}$ *est une base de* G.
Alors $F\oplus G=\mathbf{R}^3$ ***si, et seulement si,*** *la famille* $\{e_1,u_1,u_3\}$ *est une base de* $\mathbf{R}^3$. *Vérifions*

donc que c'est bien le cas.

$$\begin{aligned} ae_1 + bu_1 + cu_3 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3a+b+c & =0 \\ -a+2b+c & =0 \\ a-c & =0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4a+b=0 \\ 2b=0 \\ c=a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi $\{e_1, u_1, u_3\}$ est libre. Comme elle contient 3 élements, c'est une base de $\mathbf{R}^3$.

Seconde méthode : dimension et intersection.
Rappel : *$F \oplus G = \mathbf{R}^3$* ***si, et seulement si,*** $\dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbf{R}^3)$ *et* $F \cap G = \{(0,0,0)\}$.
Tout d'abord, d'après les questions précédentes,

$$\dim(F) + \dim(G) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbf{R}^3).$$

Montrons maintenant que $F \cap G = \{(0,0,0)\}$. Soit $(x,y,z) \in F \cap G$. Alors, puisque $\{u_1, u_3\}$ est une base de G, il existe $a, b \in \mathbf{R}$ tels que
$(x,y,z) = a(1,2,0) + b(1,1,-1)$. *De plus*

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 3x-y-10z=0 \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{cases} (a+b)+2(2a+b)-(-b)=0 \\ 3(a+b)-(2a+b)-10(-b)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a+4b=0 \\ a+12b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -56b=0 \\ a=-12b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=0 \end{cases}$$

Donc $(x,y,z) = (0,0,0)$ et ainsi, $F \cap G = \{(0,0,0)\}$.
(Remarque ; en fait on n'a montré que l'inclusion $F \cap G \subset \{(0,0,0)\}$, mais l'inclusion réciproque est toujours vraie.)

Exercice 3 — 6 points

Soit $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique de $\mathbf{R}^4$ et soit $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Soit $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$f(e_1) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad f(e_2) = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad f(e_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad f(e_4) = \varepsilon_1 - \varepsilon_3.$$

1. **(1 point)**
   Quelle est la matrice A associée à f dans ces bases canoniques ?
   La matrice associée à f dans les bases canonique est la suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. **(1 point : 0,5 méthode, 0,5 résultat)**
   Quelle est l'expression de $f(x,y,z,t)$ pour $(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4$?

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. *On a :*

$$\begin{aligned} f(x,y,z,t) &= f(x\ e_1 + y\ e_2 + z\ e_3 + t\ e_4) \\ &= x\ f(e_1) + y\ f(e_2) + z\ f(e_3) + t\ f(e_4) \\ &= x(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + y(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + z(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + t(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \\ &= (x+y+t)\varepsilon_1 + (x+2y+z)\varepsilon_2 + (y+z-t)\varepsilon_3 \end{aligned}$$

Autre méthode :

$$f(x,y,z,t) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+t \\ x+2y+z \\ y+z-t \end{pmatrix} = (x+y+t)\varepsilon_1 + (x+2y+z)\varepsilon_2 + (y+z-t)\varepsilon_3.$$

3. **(2 points : 1 calculs, 1 base)**
   Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
   Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. *On a :*

$$f(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x+y+t &= 0 \\ x+2y+z &= 0 \\ y+z-t &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+t &= 0 \\ y+z-t &= 0 \\ y+z-t &= 0 \end{cases} \quad (L2 \leftarrow L2 - L1)$$

$$\iff \begin{cases} x+y+t=0 \\ y=-z+t \end{cases} \iff \begin{cases} x=z-2t \\ y=-z+t \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a donc trouvé une famille génératrice de $Ker(f)$: $\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. *Ces deux vecteurs sont non colinéaires, ils forment donc une famille libre, et* $\mathcal{G}$ *est une base de* $Ker(f)$.

4. **(1 point : 0,5 théorème, 0,5 application)**
   En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.
   Le théorème du rang nous dit que

$$dim(Ker(f)) + rg(f) = dim(E)$$

où E *est l'espace de départ de l'application linéaire* f. *Dans notre contexte, on obtient donc :*

$$rg(f) = dim(\mathbf{R}^4) - dim(Ker(f)) = 4 - 2 = 2.$$

5. **(1 point : 0,5 justification, 0,5 résultat)**
   Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   On vient de montrer que $Im(f)$ *est de dimension 2.*
   Puisque $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f(e_1)$ *et* $f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = f(e_3)$ *sont 2 vecteurs non colinéaires de* $Im(f)$, $\{f_1, f_2\}$ *est une base de* $Im(f)$.