Outils Mathématiques 2 – Contrôle continu n° 1
Jeudi 20 février 2014 – Durée : 1 heure

Les documents, les portables et la calculatrice sont interdits. Toutes les réponses devront être ***justifiées.***
Ce contrôle comporte **3** exercices indépendants.

Exercice 1 — 4 points

Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

1. Soient $e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathcal{F} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
2. Quelle est la matrice B associée à f dans cette base ?

Exercice 2 — 10 points

1. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 2y - z = 3x - y - 10z = 0\}$.
   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.
   (b) Déterminer une base et la dimension de F.
2. Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ engendré par la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ avec
   $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (2, 1, -3)$, $u_3 = (1, 1, -1)$.
   (a) Calculer $u_1 - 3u_3$.
   (b) En déduire une base de G.
3. Montrer que $F \oplus G = \mathbf{R}^3$.

Exercice 3 — 6 points

Soit $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique de $\mathbf{R}^4$ et soit $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Soit $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$f(e_1) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad f(e_2) = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad f(e_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad f(e_4) = \varepsilon_1 - \varepsilon_3.$$

1. Quelle est la matrice A associée à f dans ces bases canoniques ?
2. Donner, en la justifiant, l'expression de $f(x, y, z, t)$ pour $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
4. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$, puis déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.