Examen Avril 2012 - Corrigé

Exercice 1 —

1. $M = Mat(T) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \in M_{1,3}(\mathbf{R})$
2. $T(u) = M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3x - 2y + 5z.$
3. $Ker(T) = \{(x,y,z) \mid 3x - 2y + 5z = 0\} = \{(x,y,z) \mid x = \frac{2}{3}y - \frac{5}{3}z\} = \mathrm{Vect}\{(2,3,0),(-5,0,3)\}$
4. $\dim Im(T) = 3 - 2 = 1$. Puisque $Im(T) \subset \mathbf{R}$ et que $\dim \mathbf{R} = 1$ également, $Im(T) = \mathbf{R} = \mathrm{Vect}\{1\}$.
5. $a\epsilon_1 + b\epsilon_2 + c\epsilon_3 = 0 \Rightarrow a = b = c = 0.$
6. $T(\epsilon_1) = 3f_1$, $T(\epsilon_2) = 0$, $T(\epsilon_3) = 0$, donc la matrice dans la nouvelle base est

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{1,3}(\mathbf{R})$$

Exercice 2 —

1. $P_A(t) = (-3-t)(10-t)(\lambda - t)$.
2. Les valeurs propres sont $-3, 10$ et λ.
3. $E_{-3}(A) = Vect\{(-1,1,0)\}$, $E_{10}(A) = Vect\{(7,6,0)\}$, $E_2(A) = Vect\{(-3,-2,20)\}$. A est diagonalisable
4. A est diagonalisable dès que les trois valeurs propres sont distinctes. Donc les seuls cas où A n'est éventuellement pas diagonalisable sont $\lambda = -3$ et $\lambda = 10$.
   Si $\lambda = -3$, -3 est valeur propre double et on calcule que $E_{-3}(A) = Vect\{(-1,1,0)\}$ est de dimension 1. Donc A n'est pas diagonalisable.
   Si $\lambda = 10$, 10 est valeur propre double et on calcule que $E_{10}(A) = Vect\{(7,6,0)\}$ est de dimension 1. Donc A n'est pas diagonalisable.

Exercice 3 — Poser $h = x - \pi/4$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin(h+\pi/4)\ln(h+\pi/4) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos h + \sin h)(\ln(\pi/4) + \ln(1 + 4h/\pi)) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + h^3\varepsilon_1(h)\right)\left(\ln(\pi/4) + \frac{4h}{\pi} - \left(\frac{4h}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{4h}{\pi}\right)^3 + h^3\varepsilon_1(h)\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + h^3\varepsilon_1(h)\right)\left(\ln(\pi/4) + \frac{4h}{\pi} - \frac{16h^2}{\pi^2} + \frac{64h^3}{\pi^3} + h^3\varepsilon_1(h)\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\ln(\pi/4) + \left(\ln(\pi/4) + \frac{4}{\pi}\right)h + \left(-\frac{8}{\pi^2} + \frac{4}{\pi} - \frac{1}{2}\ln(\pi/4)\right)h^2 + \left(\frac{64}{3\pi^3} - \frac{8}{\pi^2} - \frac{2}{\pi} - \frac{1}{6}\ln(\pi/4)\right)h^3 + h^3\varepsilon_3(h)\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\ln(\pi/4) + \left(\ln(\pi/4) + \frac{4}{\pi}\right)(x - \pi/4) + \left(-\frac{8}{\pi^2} + \frac{4}{\pi} - \frac{1}{2}\ln(\pi/4)\right)(x-\pi/4)^2\right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{64}{3\pi^3} - \frac{8}{\pi^2} - \frac{2}{\pi} - \frac{1}{6}\ln(\pi/4)\right)(x-\pi/4)^3 + (x-\pi/4)^3\varepsilon_3(x-\pi/4)\right)
\end{aligned}$$

On pose $h = 1/x$.

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1/h^3 - 1/h}{1/h^2 + 1} \\
&= \frac{1}{h}\frac{1-h^2}{1+h^2} \\
&= \frac{1}{h}(1-h^2)(1-h^2+(h^2)^2+h^4\varepsilon(h)) \\
&= \frac{1}{h}(1-2h^2+2h^4+h^4\varepsilon(h)) \\
&= \frac{1}{h} - 2h + 2h^3 + h^3\varepsilon(h) \\
&= x - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon(\frac{1}{x})
\end{aligned}$$

$\lim_{x\to+\infty}(g(x)-x) = 0$, donc $\Delta : y = x$ est asymptote à la courbe de g en $+\infty$.
Au voisinage de $+\infty$, $g(x) - x = -\frac{2}{x} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon(\frac{1}{x}) < 0$, donc la courbe est en-dessous de Δ en $+\infty$.

Exercice 4 —

1. Cours
2. Non. Par exemple $u_n = n$ et $v_n = \frac{1}{n}$. $u_n v_n = 1$ donc la suite $(u_n v_n)$ est convergente de limite 1, mais (u_n) n'est pas convergente.
3. $a > 0$. $u_n \geqslant \frac{2^{3^n}}{a^n} = \exp(3^n \ln(2) - n\ln(a))$.
   Or $3^n \ln(2) - n\ln(a) = 3^n(\ln(2) - \ln(a)\frac{n}{3^n})$.
   Par croissance comparée, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{3^n} = 0$. Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.