Université de Rennes 1 - UFR de Mathématiques
Année 2011/2012
L1 - OM2 - Outils Mathématiques 2

Examen Terminal
25 Avril 2012
Durée : 2 heures

Exercice 1
Soient $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $\{\overrightarrow{f_1}\}$ la base canonique de $\mathbb{R}$.
On considère l'application T de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie comme suit :

$$T(\overrightarrow{e_1}) = 3\overrightarrow{f_1} \quad , \quad T(\overrightarrow{e_2}) = -2\overrightarrow{f_1} \quad , \quad T(\overrightarrow{e_3}) = 5\overrightarrow{f_1}$$

1) Donner la matrice de T.
2) Soit $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$ un vecteur de composante $(x\,,\,y\,,\,z)$. Calculer $T(\overrightarrow{u})$.
3) Déterminer une base de Ker T et donner sa dimension.
4) Enoncer le théorème du rang. Donner la dimension de Im T ainsi qu'une base de ce dernier.
5) On considère les vecteurs suivants : $\overrightarrow{\epsilon_1} = \overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{\epsilon_2} = 2\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{\epsilon_3} = 5\overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3}$.
   Montrer que le système $\{\overrightarrow{\epsilon_1}, \overrightarrow{\epsilon_2}, \overrightarrow{\epsilon_3}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6) Donner la matrice de T si on munit $\mathbb{R}^3$ de la base $\{\overrightarrow{\epsilon_1}, \overrightarrow{\epsilon_2}, \overrightarrow{\epsilon_3}\}$.

Exercice 2
On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

où λ est un paramètre réel.

1) Calculer le polynôme caractéristique $P_A(t)$ de A.
2) Donner les valeurs propres de A.
3) On suppose que $\lambda = 2$. Caractériser, en donnant une base, les espaces propres associés aux valeurs propres. La matrice A est-elle diagonalisable ?
4) Déterminer les valeurs de λ pour que la matrice A ne soit pas diagonalisable.

Exercice 3
Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $\pi/4$ de la fonction $f(x) = \sin x \cdot \ell n x$.
On considère la fonction $g(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 + 1}$.
Calculer un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $+\infty$ de g. En déduire l'équation de l'asymptote ainsi que la position de la courbe représentative de g par rapport à cette asymptote.

Tournez la page $\cdots/\cdots$

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

1) Donner la définition de : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ.
2) Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose que $(u_n\,v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente. Peut-on en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes ?
3) Calculer selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}_+^*$ les limites de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $\dfrac{2^{3^n} + 3^{2^n}}{a^n}$.