Contrôle continu numéro 2
Vendredi 30 mars 2012
60 **minutes**

NOM et PRÉNOM :	GROUPE :

Les documents, les portables et la calculatrice sont interdits.
Ce contrôle comporte 5 exercices indépendants.
Le barème est donné à titre indicatif.
Toutes les réponses devront être justifiées.

Corrigé

Exercice 1 (2 points) — Calculer le développement limité de e^x à l'ordre 2 au voisinage de 1.

On pose $h = x - 1$. h est au voisinage de 0 lorsque x est au voisinage de 1.

$$e^x = e^{1+h} = e \times e^h = e\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon_1(h)\right) = e + eh + e\frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon_2(h)$$

avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon_1(h) = \lim_{h\to 0} \varepsilon_2(h) = 0$.
Donc, au voisinage de 1,

$$e^x = e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon_2(x-1).$$

Exercice 2 (4 points) — Utiliser les développements limités de $\sin(x)$ et $\tan(x)$ à l'ordre 3 pour calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{\tan(x) - x}.$$

On a

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon_1(x), \qquad \text{avec} \lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_2(x), \qquad \text{avec} \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$$

Donc

$$\frac{\sin(x) - x}{\tan(x) - x} = \frac{-\frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon_1(x)}{\frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_2(x)} = \frac{-\frac{1}{3!} + \varepsilon_1(x)}{\frac{1}{3} + \varepsilon_2(x)}$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{\tan(x) - x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3!} + \varepsilon_1(x)}{\frac{1}{3} + \varepsilon_2(x)} = \frac{-\frac{1}{3!}}{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 3 (7 points) — On rappelle les développements limités suivants au voisinage de 0 :

$$(1+h)^{1/2} = 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + h^2\varepsilon_1(h), \qquad \text{avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon_1(h) = 0$$

$$(1+h)^{1/3} = 1 + \frac{h}{3} - \frac{h^2}{9} + h^2\varepsilon_2(h), \qquad \text{avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon_2(h) = 0$$

1. Déterminer le développement limité de $\left(1-\frac{3}{x}\right)^{1/3}$ à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$.

Lorsque x est au voisinage de $+\infty$, $h = \frac{1}{x}$ est au voisinage de 0. Donc

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{1/3} &= (1-3h)^{1/3} \\ &= 1 + \frac{(-3h)}{3} - \frac{(-3h)^2}{9} + h^2\varepsilon'(h) \\ &= 1 - h - h^2 + h^2\varepsilon'(h) \\ &= 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon'\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon'(h) = 0$.

2. Déterminer le développement limité de $\left(1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{1/2}$ à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$.

Lorsque x est au voisinage de $+\infty$, $h = \frac{1}{x}$ est au voisinage de 0. Donc

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{1/2} &= (1+4h+h^2)^{1/2} \\ &= 1 + \frac{\left(4h+h^2\right)}{2} - \frac{\left(4h+h^2\right)^2}{8} + h^2\varepsilon''(h) \\ &= 1 + 2h + \frac{h^2}{2} - \frac{16h^2}{8} + h^2\varepsilon''(h) \\ &= 1 + 2h - \frac{3h^2}{2} + h^2\varepsilon''(h) \\ &= 1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{2x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon''\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon''(h) = 0$.

3. Soit, pour tout $x > 0$,
$$f(x) = (x^3 - 3x^2)^{1/3} - 2(x^2 + 4x + 1)^{1/2}.$$
Déduire de ce qui précède le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 1 au voisinage de $+\infty$, que l'on écrira sous la forme
$$\text{pour tout } x > 0, \quad f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{1}{x}\,\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \text{avec } \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \varepsilon(h) = 0,$$
où a, b, c sont des constantes, $c \neq 0$.
On pourra remarquer que pour tout $x > 0$, $(x^3)^{1/3} = x$ et $(x^2)^{1/2} = x$.

Soit $x > 0$.
$$\begin{aligned}
f(x) &= (x^3 - 3x^2)^{1/3} - 2(x^2 + 4x + 1)^{1/2} \\
&= (x^3)^{1/3}\left(1 - \frac{3}{x}\right)^{1/3} - 2(x^2)^{1/2}\left(1 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^{1/2} \\
&= x\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon'\left(\frac{1}{x}\right)\right) - 2x\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{2x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon''\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\
&= -x - 5 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x}\,\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$
avec $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \varepsilon(h) = 0$.

4. **Application**. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ de f admet une droite asymptote au voisinage de $+\infty$, dont on donnera une équation ainsi que la position relative par rapport à $\mathcal{C}_f$, au voisinage de $+\infty$.

D'après ce qui précède,
$$f(x) - (-x - 5) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x}\,\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$
Donc
$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - (-x - 5)\big) = 0$$
La droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -x - 5$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
De plus, si $x > 0$, $\frac{2}{x} > 0$, donc $f(x) - (-x - 5) \geqslant 0$ au voisinage de $+\infty$. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{D}$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 4 (5 points) — Calculer le développement limité de $\ell n\left(\frac{1+x+x^2}{1-x}\right)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

On a

$$\ell n\left(\frac{1+x+x^2}{1-x}\right) = \ell n(1+x+x^2) - \ell n(1-x)$$

De plus, au voisinage de 0,

$$\ell n(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_1(x)$$

$$\begin{aligned}\ell n(1+x+x^2) &= (x+x^2) - \frac{(x+x^2)^2}{2} + \frac{(x+x^2)^3}{3} + x^3\varepsilon_2(x)\\ &= x + x^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_2(x)\\ &= x + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + x^3\varepsilon_2(x)\end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$.
Donc

$$\ell n\left(\frac{1+x+x^2}{1-x}\right) = 2x + x^2 - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

Autre méthode : développer $\frac{1+x+x^2}{1-x} = (1+x+x^2)\frac{1}{1-x}$. (Cependant, les calculs intermédiaires sont plus longs)

Exercice 5 (2 points) — Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

est convergente et donner sa limite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$$

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$$

car $\sqrt{n} > 0$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.
Par le théorème d'encadrement, (u_n) est convergente et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$