Contrôle continu numéro 2
Vendredi 30 mars 2012
60 **minutes**

NOM et PRÉNOM : **GROUPE** :

Les documents, les portables et la calculatrice sont interdits.
Ce contrôle comporte 5 exercices indépendants.
Le barème est donné à titre indicatif.
Toutes les réponses devront être justifiées.

Exercice 1 (2 points) — Calculer le développement limité de e^x à l'ordre 2 au voisinage de 1.

Exercice 2 (4 points) — Utiliser les développements limités de $\sin(x)$ et $\tan(x)$ à l'ordre 3 pour calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{\tan(x) - x}.$$

Exercice 3 (7 points) — On rappelle les développements limités suivants au voisinage de 0 :

$$(1+h)^{1/2} = 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + h^2\varepsilon_1(h), \qquad \text{avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon_1(h) = 0$$

$$(1+h)^{1/3} = 1 + \frac{h}{3} - \frac{h^2}{9} + h^2\varepsilon_2(h), \qquad \text{avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon_2(h) = 0$$

1. Déterminer le développement limité de $\left(1 - \dfrac{3}{x}\right)^{1/3}$ à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$.

2. Déterminer le développement limité de $\left(1 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)^{1/2}$ à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$.

3. Soit, pour tout $x > 0$,
$$f(x) = (x^3 - 3x^2)^{1/3} - 2(x^2 + 4x + 1)^{1/2}.$$
Déduire de ce qui précède le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 1 au voisinage de $+\infty$, que l'on écrira sous la forme
$$\text{pour tout } x > 0, \quad f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{1}{x}\,\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \text{avec} \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \varepsilon(h) = 0,$$
où a, b, c sont des constantes, $c \neq 0$.
On pourra remarquer que pour tout $x > 0$, $(x^3)^{1/3} = x$ et $(x^2)^{1/2} = x$.

4. **Application**. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ de f admet une droite asymptote au voisinage de $+\infty$, dont on donnera une équation ainsi que la position relative par rapport à $\mathcal{C}_f$, au voisinage de $+\infty$.

Exercice 4 (5 points) — Calculer le développement limité de $\ell n \left(\dfrac{1+x+x^2}{1-x} \right)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Exercice 5 (2 points) — Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

est convergente et donner sa limite.