LICENCE PCSTM | ANNÉE UNIVERSITAIRE 2011-2012
1ÈRE ANNÉE, 2ÈME SEMESTRE | OUTILS MATHÉMATIQUES 2

Contrôle continu numéro 1
Jeudi 16 février
60 **minutes**

Corrigé

Exercice 1 : [10 pts]

1. [**1 pt**] Le système $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ ne peut pas être libre car il contient 6 vecteurs et que $6 > 4 = \dim(\mathbf{R}^4)$.
2. [**1 pt**] $u_3 + u_4 = u_5$. On en déduit que le système $\{u_3, u_4, u_5\}$ est lié.
3. [**4 pts**] F est le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ engendré par la famille $\{u_1, u_2, u_3, u_6\}$. Il faut chercher la plus grande sous-famille libre contenue dans la famille génératrice $\{u_1, u_2, u_3, u_6\}$. Pour celà, résolvons le système $au_1 + bu_2 + cu_3 + du_6 = (0, 0, 0, 0)$ d'inconnues $a, b, c, d \in \mathbf{R}$.

$$au_1 + bu_2 + cu_3 + du_6 = (0,0,0,0) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a & - & b & & & + & 2d & = & 0 \\ -a & + & 2b & + & 2c & - & d & = & 0 \\ 2a & - & b & + & 3c & + & 3d & = & 0 \\ & & 2b & + & 4c & + & 2d & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a & - & b & & & + & 2d & = & 0 \\ & & b & + & 2c & + & d & = & 0 \\ & & b & + & 3c & - & d & = & 0 \\ & & 2b & + & 4c & + & 2d & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a & - & b & & & + & 2d & = & 0 \\ & & b & + & 2c & + & d & = & 0 \\ & & & & c & - & 2d & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{cases} a = -7d \\ b = -5d \\ c = 2d \end{cases}$$

Remarque : suivant la variable libre choisie (ci-dessus d), on obtient un des systèmes suivants :

$$\begin{cases} a = -7d \\ b = -5d \\ c = 2d \end{cases} \iff \begin{cases} a = 7/5b \\ c = -2/5b \\ d = -1/5b \end{cases} \iff \begin{cases} a = -7/2c \\ b = -5/2c \\ d = 1/2c \end{cases} \iff \begin{cases} b = 5/7a \\ c = -2/7a \\ d = -1/7a \end{cases}$$

En prenant $d = -1$, on obtient $u_6 = 7u_1 + 5u_2 - 2u_3 \in \mathrm{Vect}\{u_1, u_2, u_3\}$. Donc $\{u_1, u_2, u_3\}$ est toujours une **famille génératrice** de F (ou encore $F = \mathrm{Vect}\{u_1, u_2, u_3\}$).
En prenant $d = 0$, on a montré

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = (0,0,0,0) \iff a = b = c = 0.$$

Donc la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est **libre**. Ainsi, $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une **base** de F.

Attention : $F = \mathrm{Vect}\{u_1, u_2, u_3, u_6\}$ signifie que les éléments de F sont les vecteurs $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$ qui s'écrivent sous la forme

$$(x, y, z, t) = au_1 + bu_2 + cu_3 + du_6.$$

Il ne faut pas confondre F est les solutions (a,b,c,d) du système $au_1 + bu_2 + cu_3 + du_6 = (0,0,0,0)$, qui détermine toutes les manières d'écrire le vecteurs nul $(0,0,0,0)$ sous la forme $au_1 + bu_2 + cu_3 + du_6$.

Remarque : Une autre manière de procéder est de chercher une équation de F en déterminant quels vecteurs (x,y,z,t) appartiennent à F. Cette méthode est plus longue (et difficile) et en **lisant l'exercice jusqu'au bout** on remarque que c'est exactement le but de la question 4.(b) (mais avec de l'aide).

4. $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \mid 2x + 2y - t = 0\}$.
   (a) **[2 pts]** Soit $(x,y,z,t) \in G$. Alors $t = 2x + 2y$, donc

$$(x,y,z,t) = (x,y,z,2x+2y) = x\underbrace{(1,0,0,2)}_{v_1} + y\underbrace{(0,1,0,2)}_{v_2} + z\underbrace{(0,0,1,0)}_{v_3}.$$

Ainsi, $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une **famille génératrice** de G.
Soient $a,b,c \in \mathbf{R}$ tels que $av_1 + bv_2 + cv_3 = (0,0,0,0)$. Alors

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad a = b = c = 0.$$

Donc $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une **famille libre**, c'est donc une **base** de G.
Ainsi, $\dim G = 3$.

   (b) **[2 pts]** $2 \times 1 + 2 \times (-1) - 0 = 0$, donc $u_1 = (1,-1,2,0) \in G$.
$2 \times (-1) + 2 \times 2 - 2 = 0$, donc $u_2 = (-1,2,-1,2) \in G$.
$2 \times 0 + 2 \times 2 - 4 = 0$, donc $u_3 = (0,2,3,4) \in G$.
Ainsi, $F = \mathrm{Vect}\{u_1, u_2, u_3\} \subset G$.
De plus, comme $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de F, $\dim F = 3$. Donc, $\dim F = \dim G$.
Par conséquent $F = G$.

Remarque : on peut aussi montrer que $G \subset F$ en montrant que les éléments de la base de G se décomposent dans la base de F, mais ceci est beaucoup plus long.

Exercice 2 : [10 pts]

1. **[1 pt]** $\mathcal{M}at_{B,F}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
2. (a) **[1 pt]** Soit $V = xe_1 + ye_2 + ze_3$. Alors

$$\phi(V) = \mathcal{M}at_{B,F}(\phi) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} x + 6y + 4z \\ -3x + 6z \end{pmatrix}_F = (x + 6y + 4z)f_1 + (-3x + 6z)f_2.$$

Autre méthode : $\phi(V) = x\phi(e_1) + y\phi(e_2) + z\phi(e_3) = (x + 6y + 4z)f_1 + (-3x + 6z)f_2$.

   (b) **[3 pts]** Soit $V = xe_1 + ye_2 + ze_3$.

$$V \in \mathrm{Ker}(\phi) \iff \begin{cases} x + 6y + 4z &= 0 \\ -3x + 6z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -z \\ x = 2z \end{cases} \iff V = z(2e_1 - e_2 + e_3)$$

Le vecteur $U = 2e_1 - e_2 + e_3$ est non nul et engendre $\mathrm{Ker}(\phi)$ donc forme une base de $\mathrm{Ker}(\phi)$.

$$B_1 = \{U\}.$$

Ainsi, $\dim \mathrm{Ker}(\phi) = 1$.
D'après le théorème du rang,

$$\dim \mathrm{Ker}(\phi) + \dim \mathrm{Im}(\phi) = \dim \mathbf{R}^3.$$

Donc, $\dim \mathrm{Im}(\phi) = 3 - 1 = 2$.

Remarque : $\mathrm{Im}(\phi)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$ de dimension 2 donc est égal à $\mathbf{R}^2$ tout entier.

(c) **[1 pt]** $\phi(e_1)$ et $\phi(e_2)$ sont des éléments de $\mathrm{Im}(\phi)$.
De plus, soient $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $a\phi(e_1) + b\phi(e_2) = 0$. Alors $(a+6b)f_1 + (-3a)f_2 = 0$. Donc, puisque F est une famille libre,

$$\begin{cases} a + 6b = 0 \\ -3a = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad a = b = 0.$$

Donc F' est une famille libre de $\mathrm{Im}(\phi)$. Comme elle contient $2 = \dim \mathrm{Im}(\phi)$ éléments, c'est une base de $\mathrm{Im}(\phi)$.

3. **[2 pts]** Soient $a, b, c \in \mathbf{R}$ tels que $ae_1 + be_2 + cU = 0$.
On remarque que $ae_1 + be_2 + cU = (a+2c)e_1 + (b-c)e_2 + ce_3$. Puisque $\{e_1, e_2, e_3\}$ est libre,

$$ae_1 + be_2 + cU = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a + 2c & = 0 \\ b - c & = 0 \\ c & = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad a = b = c = 0.$$

B' est donc une famille libre de $\mathbf{R}^3$ et contient $3 = \dim(\mathbf{R}^3)$ éléments, donc c'est une base de $\mathbf{R}^3$.

Autre méthode : En appliquant ϕ à l'égalité $ae_1 + be_2 + cU = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \phi(ae_1 + be_2 + cU) &= \phi(0) \\ a\phi(e_1) + b\phi(e_2) + c \underbrace{\phi(U)}_{\substack{=0 \\ \text{car } U \in \mathrm{Ker}(\phi)}} &= 0 \\ a\phi(e_1) + b\phi(e_2) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $a = b = 0$ car $\{\phi(e_1), \phi(e_2)\}$ est une famille libre (d'après 2.(c)).
Et par suite, $cU = 0$, donc $c = 0$.

4. **[2 pts]**
$\phi(e_1) = 1 \cdot \phi(e_1) + 0 \cdot \phi(e_2)$
$\phi(e_2) = 0 \cdot \phi(e_1) + 1 \cdot \phi(e_2)$
$\phi(U) = 0 = 0 \cdot \phi(e_1) + 0 \cdot \phi(e_2)$
Donc

$$\mathcal{M}at_{B',F'}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Commentaires

1. Une famille de vecteurs dont les vecteurs sont deux à deux non colinéaires **n'est pas** nécessairement libre. Prenez par exemple, $\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$.
2. Une famille de $n+1$ vecteurs (ou plus) dans un espace de dimension n est **toujours** liée.
3. Si une famille de vecteurs contient une famille liée, alors elle est elle même liée : si vous avez répondu que $\{u_3,u_4,u_5\}$ est liée, vous ne pouvez pas répondre à côté que $\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6\}$ est libre !
4. Inversement, si une famille est libre, toute sous-famille de celle-ci est également libre : si vous avez répondu que $\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6\}$ est libre, vous ne pouvez pas répondre à côté que $\{u_3,u_4,u_5\}$ est liée !
5. Les sous-espaces de $\mathbf{R}^4$ ne sont pas tous de dimension 4. Dans l'exercice 1 vous avez deux exemples d'espaces de dimension 3 (qui sont en fait égaux). Dans $\mathbf{R}^3$, les droites sont de dimension 1 et les plans de dimension 2.
6. Pour beaucoup la résolution des systèmes est très laborieuse. Entraînez-vous, il y a pleins d'exercices à faire dans la feuille de TD n° 1.
7. Pour la résolution des systèmes :
   (a) méthode du pivot : opérations sur les lignes permettant d'échelonner le système (le rendre triangulaire supérieur). On procède dans ce cas par équivalence ($\Leftrightarrow$). Pensez à écrire les opérations effectuées. Une fois échelonné, on résout facilement le système en partant du bas.
   (b) **(ou bien)** toutes autres manipulations (par exemple des substitutions). On procède dans ce cas par double implication ($\Rightarrow$ puis $\Leftarrow$), c'est-à-dire qu'une fois que vous pensez avoir trouvé la solution (sens $\Rightarrow$), il faut faire une **réciproque** (sens $\Leftarrow$) pour montrer que ce que vous avez trouvé est effectivement solution du système de départ.
   La réciproque est très importante car beaucoup "oublient" en chemin des équations, et se retrouvent donc avec trop de "solutions", dont certaines ne vérifient pas le système de départ (donc ne sont pas des solutions).
   Pensez également à indiquer les substitutions (ou autres opérations) effectuées.
8. Pour montrer l'égalité de deux sous-espaces vectoriels E et F de $\mathbf{R}^n$, on peut montrer
   (a) $\dim E = \dim F$ et $E \subset F$;
   (b) **(ou bien)** $\dim E = \dim F$ et $F \subset E$;
   (c) **(ou bien)** $E \subset F$ et $F \subset E$;

   Dans tous les cas il y a deux choses à dire !
9. **"base = libre + génératrice"** : ces deux mots doivent apparaître quand on démontre qu'une famille est une base.
10. Le théorème du rang est un théorème relatif aux applications linéaires. Cela n'a aucun sens de l'appliquer à un espace vectoriel.
11. L'application ϕ n'est pas un endomorphisme (les espaces d'arrivée et de départ ne sont pas les mêmes). Quand on parle de la matrice de ϕ dans les bases B et F, cela signifie que l'on prend la base B sur l'espace de départ ($\mathbf{R}^3$) et la base F sur l'espace d'arrivée ($\mathbf{R}^2$). Il n'y a bien qu'une seule matrice à écrire.
12. Quand vous écrivez des produits matriciels, vérifiez bien que ceux-ci ont un sens :
    "matrice (n,p)" $\cdot$ "matrice (p,m)"
13. En général, les scalaires (nombres réels ou complexes) s'écrivent devant les vecteurs. Exemple :
    On écrit $2\vec{u}$ plutôt que $\vec{u}2$.
    On écrit $(x+y)\vec{u}$ plutôt que $\vec{u}(x+y)$, si $x,y\in\mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$).