Contrôle continu numéro 1
Jeudi 16 février
60 **minutes**

NOM et PRÉNOM :	**GROUPE :**

Les documents, les portables et la calculatrice sont interdits.
Ce contrôle comporte deux exercices.
Toutes les réponses devront être justifiées.

1. Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs :

$$u_1 = (1, -1, 2, 0), \quad u_2 = (-1, 2, -1, 2), \quad u_3 = (0, 2, 3, 4),$$
$$u_4 = (-2, 5, -1, -1), \quad u_5 = (-2, 7, 2, 3), \quad u_6 = (2, -1, 3, 2).$$

   (a) Le système $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ peut-il être libre ?

   (b) Calculer $u_3 + u_4$. Que peut-on en déduire pour le système $\{u_3, u_4, u_5\}$?

   (c) On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ engendré par $\{u_1, u_2, u_3, u_6\}$.
   Déterminer une base de F.

   (d) Soit $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid 2x + 2y - t = 0\}$.

      i. Déterminer la dimension de G.

      ii. Montrer que $F = G$.

2. Soit $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$.
Soit $F = \{f_1, f_2\}$ une base de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$.
Soit ϕ l'application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par $\phi(e_1) = f_1 - 3f_2$, $\phi(e_2) = 6f_1$ et $\phi(e_3) = 4f_1 + 6f_2$.

   (a) Donner la matrice de ϕ dans les bases B et F.

   (b) i. Soit V un vecteur de $\mathbf{R}^3$ et x, y, z ses coordonnées dans la base B. Calculer $\phi(V)$ en fonction de x, y, z, f_1 et f_2.

   ii. Déterminer Ker ϕ et en donner une base B_1.
   Quelle est la dimension de Ker ϕ ? En déduire la dimension de Im ϕ .

   iii. Soit $F' = \{\phi(e_1), \phi(e_2)\}$. Démontrer que F' est une base de Im ϕ.

   (c) Soit U le vecteur de $\mathbf{R}^3$ défini par $U = 2e_1 - e_2 + e_3$.
   Soit $B' = \{e_1, e_2, U\}$.
   Démontrer que B' est une base de $\mathbf{R}^3$.

   (d) Donner la matrice de ϕ dans les bases B' et F'.