Université de Rennes 1 - UFR de Mathématiques
Année 2010 - 2011
L1 - PCSTM - Outils Mathématiques 2

Deuxième Session
Juin 2011
Durée : 2 heures
Les documents et les calculatrices sont interdits.

Le sujet comporte quatre exercices indépendants.

Exercice 1

Notons $\mathbb{R}_1[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus 1 et $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus 2.
On rappelle que $\mathbb{R}_1[X]$ est un espace vectoriel de dimension 2 de base canonique $C = \{1\,,\, X\}$ et que $\mathbb{R}_2[X]$ est un espace vectoriel de dimension 3 de base canonique $B = \{1\,,\, X\,,\, X^2\}$.

1. Montrer que le système $B' = \{P_0(X) = 1\,,\, P_1(X) = X+1\,,\, P_2(X) = X^2+X+1\}$ est un système libre. En déduire que B' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. On considère l'application linéaire ψ définie de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_1[X]$ comme suit :

   $$\psi(P) = P'(X) + 2X\,P''(X)$$

   où $P'(X)$ est la dérivée première, $P''(X)$ la dérivée seconde de P.
   Calculer $\psi(P_0)\,,\, \psi(P_1)\,,\, \psi(P_2)$. En déduire la matrice de ψ relativement aux bases B' et C.
3. Déterminer le noyau de l'application ψ : Ker ψ.
   En déduire la dimension de Im ψ. Caractériser Im ψ en donnant une base de ce dernier.

Exercice 2

On considère la matrice A suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$ de A.
2. Trouver les valeurs propres de A.
3. Caractériser, en donnant une base, les espaces propres associés aux valeurs propres de la question précédente.
4. La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier.
   Si oui, donner une forme diagonale de A ainsi que la matrice de passage.

Tournez la page SVP

Exercice 3

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ? lesquelles sont fausses ?

a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Si la suite $(u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente, alors $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers 0.

c) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On suppose que la suite $(\cos u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite 1, alors la suite $(\sin u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Donner la limite des suites suivantes :

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} n \sin \dfrac{1}{n}$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \sin \dfrac{1}{n}$

f) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n\, n^2 + 1}{2n^2 + 5n + 7}$

Exercice 4

On rappelle les développements limités au voisinage de 0 suivantes :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + x^6\,\epsilon(x)$$

$$\mathrm{Ln}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + x^6\,\epsilon(x)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + x^6\,\epsilon(x)$$

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\mathrm{Ln}(1 + \cos x)$.
2. Calculer la limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{Ln}(1+x^2)}{e^{x^2} - \cos x}$.