Université de Rennes 1 - UFR de Mathématiques
Année 2010 - 2011
L1 - PCSTM - Outils Mathématiques 2

Examen Terminal
Mercredi 20 Avril 2011
Durée : 2 heures
Les documents et les calculatrices sont interdits.

Le sujet comporte quatre exercices indépendants.

Exercice 1

Soit $B = \{\vec{e}_1\,,\,\vec{e}_2\,,\,\vec{e}_3\}$ une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et $B' = \{\vec{\epsilon}_1\,,\,\vec{\epsilon}_2\}$ une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.
On définit l'application linéaire φ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ comme suit :

$$\varphi(\vec{e}_1) = \vec{\epsilon}_1 + 3\,\vec{\epsilon}_2 \quad , \quad \varphi(\vec{e}_2) = \vec{\epsilon}_1 + 3\,\vec{\epsilon}_2 \quad , \quad \varphi(\vec{e}_3) = \vec{\epsilon}_1 + 3\,\vec{\epsilon}_2$$

1. Donner la matrice de φ relativement à B et B'.
2. Montrer que Ker φ est de dimension 2 et en donner une base.
3. Donner, en justifiant, la dimension de Im φ. Caractériser Im φ en donnant une base.

Exercice 2

On considère la matrice A suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique $P_c(t)$ de A.
2. Donner les valeurs propres de A.
3. Déterminer, en donnant une base, les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre.
4. La matrice A est-elle diagonalisable ? Pourquoi ?
   Si oui, donner la forme diagonale de A ainsi que la matrice de passage.

Exercice 3

Parmi les énoncés suivants, certains sont vrais, d'autres sont faux. Lesquels ?
(Attention : une réponse fausse est pénalisée !)

a) Une sous-suite (ou suite extraite) d'une suite convergente est convergente.
b) Si pour tout entier n, u_{2n} est positif et u_{2n+1} négatif, alors la suite est divergente.
c) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
d) Toute suite convergente est bornée.
e) Toute suite bornée est convergente.
f) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante dont les termes sont positifs, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
g) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a tous ses termes positifs et converge vers 0, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Tournez la page SVP

Exercice 4

On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes : $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $v_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^n$.

On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $w_n = u_n + v_n$.

1. Calculer w_0 , w_1 , w_2 , w_3.
2. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle une suite géométrique ?
3. Etudier la limite de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$.
4. Soit $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n$. Calculer S_n en fonction de n et trouver la limite de S_n .