Université de Rennes 1 - UFR de Mathématiques
Année 2010 - 2011
L1 - PCSTM - Outils Mathématiques 2

Contrôle Continu

Vendredi 1er Avril 2011

Durée : 1 heure

Les documents et les calculatrices sont interdits.

Le sujet comporte trois exercices indépendants.

Exercice 1

On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Effectuer le produit $A \cdot B$.

Exercice 2

Soit $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\{\vec{e}_1 \ , \ \vec{e}_2 \ , \ \vec{e}_3\}$.

On définit les deux applications linéaires f et g de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 \quad , \quad f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_2 \quad , \quad f(\vec{e}_3) = -\,\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$$

$$g(\vec{e}_1) = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3 \quad , \quad g(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 - \vec{e}_3 \quad , \quad g(\vec{e}_3) = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

1. Donner les composantes de la base canonique $\{\vec{e}_1 \ , \ \vec{e}_2 \ , \ \vec{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les matrices A et B associées respectivement à f et à g dans la base canonique.
3. Déterminer une base de Ker f et une base de Im f.
4. A-t-on $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$?

Tournez la page SVP

5. Déterminer une base de Ker g et une base de Im g.
6. A-t-on Ker f = Im g et Im f = Ker g ?

.

Tournez la page SVP

Exercice 3

On considère l'application linéaire ψ de $\mathbb{R}_2[X]$ (espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2) dans $\mathbb{R}_2[X]$ définie comme suit :

$$\psi(P) = (X+1)^2 \ \ P''(X) + X\,P'(X)$$

Donner la matrice de ψ dans la base $\{1\ ,\ X\ ,\ X^2\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.