# Module S2POM2UT : OM2
# Outils Mathématiques 2
## Examen du 06 mai 2010 - Durée : 2 heures

---

**Exercice 1**

Soit $B = \{\vec{e_1}\,,\,\vec{e_2}\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $C = \{\vec{f}_1\,,\,\vec{f}_2\,,\,\vec{f}_3\}$ celle de $\mathbb{R}^3$.
On définit l'application $f$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$\begin{cases} f(\vec{e_1}) = 2\vec{f}_1 + \vec{f}_2 - \vec{f}_3 \\ f(\vec{e_2}) = \vec{f}_1 + 3\vec{f}_2 \end{cases}$$

1. Donner la matrice $M$ associée à $f$.
2. On considère les vecteurs :
   $\vec{\epsilon_1} = \vec{e_1} + \vec{e_2}$ , $\vec{\epsilon_2} = \vec{e_1} + 2\vec{e_2}$ , $\vec{\eta_1} = \vec{f}_1 + \vec{f}_3$ , $\vec{\eta_2} = \vec{f}_2$ , $\vec{\eta_3} = -\vec{f}_1 + \vec{f}_3$ .
   Montrer que le système $B_1 = \{\vec{\epsilon_1}\,,\,\vec{\epsilon_2}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$, $C_1 = \{\vec{\eta_1}\,,\,\vec{\eta_2}\,,\,\vec{\eta_3}\}$ une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Calculer $f(\vec{\epsilon_1})$ et $f(\vec{\epsilon_2})$ en fonction de $\vec{\eta_1}\,,\,\vec{\eta_2}\,,\,\vec{\eta_3}$ .
   Donner la matrice de $f$ relativement aux bases $B_1$ et $C_1$.

**Exercice 2**

Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les valeurs propres de $A$ sont 0 et $-8$.
2. Montrer que :
   $$KerA = Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \quad , \quad Ker\,(A + 8Id) = Vect\left\{\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}\right\}$$
3. La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?

Tournez svp

**Exercice 3**

On rappelle les développements limités au voisinage de 0 suivants :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3\,!} + x^3\,\epsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} + x^4\,\epsilon(x)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + x^3\,\epsilon(x)$$

$$\ell n(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4\,\epsilon(x)$$

1. Calculer le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 4 de $\ell n(1 + \cos x)$.
2. Calculer le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 de $e^{\sin x}$ et en déduire :

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - (1 + x + \frac{x^2}{2})}{x^3}$$

**Exercice 4**

Justifier ou donner un contre-exemple selon que les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

(1) Si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

(2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente, alors à partir d'un certain rang $u_n$ est monotone.

(3) Soit $(u_n)$ une suite de termes strictement positifs, alors sa limite est non nulle.