Outils mathématiques 2. Controle continu 2.

Lundi 29 Mars 2010 : 08h30-09h30.

Exercice 1. Soit $B_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B_2 = \{s_1, s_2\}$ celle de $\mathbb{R}^2$. On définit alors l'application linéaire, f, de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{cases} f(e_1) = s_1 + s_2, \\ f(e_2) = -2s_1 + s_2, \\ f(e_2) = s_1 - s_2. \end{cases}$$

1) Donner la matrice M associée à f de la base B_3 à la base B_2.
2) Déterminer $Ker(f)$, le noyau de f. Quelle est la dimension de $Ker(f)$?
3) Déterminer la dimension de $Im(f)$.

Exercice 2. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Vérifier que $det(M - \lambda I) = -(\lambda + 6)(\lambda - 4)(\lambda - 2)$. En déduire les trois valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 de u, c'est-à-dire les $\lambda_j \in \mathbb{R}$ tels que $Ker(u - \lambda_j id_{\mathbb{R}^3}) \neq \{0\}$.
2) Pour chaque λ_j, déterminer l'unique vecteur $\varepsilon_j \in Ker(u - \lambda_j id_{\mathbb{R}^3})$ dont la première composante dans la base canonique est 1.
3) Donner la matrice N de u dans la base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$.