UFR Mathématiques
Université Rennes I

Licence PCGI 1re année
Année 2007/2008

Module L32 : Outils Mathématiques II.

Troisième contrôle continu : durée deux heures.

Les résumés de cours sont les seuls documents autorisés.

Vendredi 11 avril 2008, 8h–10h.

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbf{R}^3$ le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 5 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 3 \\ 3x & + & 4y & - & z & = & 1 \end{array}\right. .$$

Exercice 2. On note $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ et on désigne par $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$.

Soient f et g les applications linéaires de $\mathbf{R}^2$ dans lui-même définies par :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x,y) = (2x+3y, -5x+y), \qquad g(e_1) = -e_1 + 2e_2, \quad g(e_2) = -4e_1 + 3e_2.$$

1. Donner la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. Donner la matrice B de g dans la base $\mathcal{B}$.
3. Déterminer la matrice de $f \circ g$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 3. On note dans la suite $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.

Soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans lui-même définie par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3, \quad f(x,y,z) = (2y - z, -x + 3y - z, -2x + 4y - z).$$

1. Déterminer le noyau de l'application f ; donner une base de $\ker f$.
2. (a) Quel est le rang de f ?
   (b) Les vecteurs $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ sont-ils libres ?
   (c) Montrer que $f(e_1)$ et $f(e_3)$ sont libres.
   (d) Donner une base de $\mathrm{Im} f$.
3. Soient $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,2,3)$ et $u_3 = (1,1,2)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{C} = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
   (b) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$.
   (c) En déduire que $f \circ f = f$.
   (d) Déterminer une équation de $\mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.

T.S.V.P.

Exercice 4. On rappelle que le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $y \longmapsto \sqrt{1+y}$ est

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}\,y - \frac{1}{8}\,y^2 + \frac{1}{16}\,y^3 + y^3\,\varepsilon(y), \quad \text{où } \lim_{y\to 0} \varepsilon(y) = 0.$$

1. (a) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\sqrt{\cos(2x)}$. On pourra écrire $\cos(2x) = 1 + [\cos(2x) - 1]$.

(b) Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x\sqrt{\cos(2x)}}{x^3}.$$

2. Soit g la fonction définie par

$$\forall x > 0, \quad g(x) = x\left(\sqrt{x^2+x} - x\right) = x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1\right).$$

Montrer que g possède une asymptote lorsque x tend vers $+\infty$ et préciser la position relative de la courbe et de l'asymptote.

Exercice 5. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{xe^x - \ln(1+x)}{\sin(x) - \ln(1+\sin x)}.$$

Exercice 6. 1. Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

2. En déduire le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $F(x) = \arctan(x)$.

Exercice 7 (bonus)**.** Soit U l'application linéaire de $\mathbf{R}_2[X]$ dans lui-même définie par

$$\forall P \in \mathbf{R}_2[X], \quad U(P) = P - P(0) + P(1)X - P(-1)X^2.$$

Écrire la matrice de U dans la base $\{1, X, X^2\}$.

L32 : Correction succinte de l'examen.

Exercice 1. Notons (L) le système linéaire à résoudre ; en effectuant les deux opérations L2-2L1 et L3-3L1 on a

$$(\mathrm{L}) \iff \left\{\begin{array}{rrrrr} x & +2y & +3z & = & 5 \\ & -y & -5z & = & -7 \\ & -2y & -10z & = & -14 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrr} x & +2y & +3z & = & 5 \\ & y & +5z & = & 7 \end{array}\right. ;$$

x et y sont des variables principales, z est une variable libre. Il reste à exprimer les variables principales en fonction de la variable libre. On obtient $y = 7 - 5z$ puis $x = -9 + 7z$.

L'ensemble des solutions de (L) est $\mathcal{S} = \{(-9 + 7z, 7 - 5z, z) = (-9, 7, 0) + z\,(7, -5, 1) : z \in \mathbf{R}\}$.

Exercice 2. La matrice C de $f\circ$ dans la base $\mathcal{B}$ est AB ce qui donne

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = AB = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 23 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. 1. Puisque $\ker f = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : f(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$,

$$(x, y, z) \in \ker f \iff \left\{\begin{array}{rrrrr} -x & +3y & -z & = & 0 \\ -2x & +4y & -z & = & 0 \\ & 2y & -z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrr} -x & +3y & -z & = & 0 \\ & 2y & -z & = & 0 \end{array}\right. .$$

En exprimant x et y en fonction de z, on obtient $y = z/2$ puis $x = z/2$. Par conséquent, $\ker f = \{(z/2, z/2, z) : z \in \mathbf{R}\} = \mathrm{Vect}((1, 1, 2))$.

Une base de $\ker f$ est le vecteur $(1, 1, 2)$.

2. (a) Le théorème du rang $\dim \mathbf{R}^3 = \dim \ker f + \mathrm{rg}(f)$ donne $\mathrm{rg}(f) = 2$.

(b) $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ sont **3** vecteurs appartenant à l'image de f qui est un sous-espace vectoriel de dimension **2**. Ils sont donc liés ($2 < 3$!)

(c) Les vecteurs $f(e_1) = (0, -1, -2)$ et $f(e_2) = (-1, -1, -1)$ sont non nuls et échelonnés : ils sont donc libres.

(d) Une base de $\mathrm{Im}(f)$ est $\{f(e_1), f(e_3)\}$ car c'est une famille libre maximale de $\mathrm{Im}(f)$: les **2** vecteurs $f(e_1)$ et $f(e_3)$ sont libres et appartiennent à $\mathrm{Im}(f)$ dont la dimension est **2**.

3. (a) On échelonne les vecteurs u_1, u_2, u_3

$$\begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 1 & u_1 \\ 1 & 2 & 3 & u_2 \\ 1 & 1 & 2 & u_3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 1 & u_1 \\ 0 & 1 & 2 & u_2 - u_1 \\ 0 & 0 & 1 & u_3 - u_1 \end{array}$$

et on obtient trois vecteurs non nuls échelonnés. Ces vecteurs sont donc libres et en dimension 3 forment une base de $\mathbf{R}^3$.

(b) Un calcul élémentaire donne $f(u_1) = u_1$, $f(u_2) = u_2$ et $f(u_3) = (0, 0, 0)$. La matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ est donc

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Puisque $M^2 = M$, on a $f \circ f = f$.

(d) Puisque u_1 et u_2 sont libres, pour trouver une équation de $\mathrm{Vect}(u_1, u_2)$, cherchons à quelle condition les vecteurs u_1, u_2 et $v = (x, y, z)$ sont liés en les échelonnant.

$$\begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 1 & u_1 \\ 1 & 2 & 3 & u_2 \\ x & y & z & v \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 1 & u_1 \\ 0 & 1 & 2 & u_2' = u_2 - u_1 \\ 0 & y-x & z-x & v' = v - xu_1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 1 & u_1 \\ 0 & 1 & 2 & u_2' \\ 0 & 0 & x-2y+z & v' - (y-x)u_2' \end{array}.$$

Les vecteurs u_1, u_2 et v sont liés si et seulement si $x - 2y + z = 0$ qui est une équation du plan $\mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.

Exercice 4. 1. (a) $\cos(2x) - 1 = -2x^2 + x^2\varepsilon_1(x)$ et $\sqrt{1+y} = 1 + y/2 - y^2/8 + y^2\varepsilon_2(y)$. Par substitution $(-2x^2 \to y)$, $\sqrt{\cos(2x)} = 1 - x^2 + x^2\varepsilon_3(x)$.

(b) Effectuons un DL à l'ordre 3 en 0 du numérateur :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_4(x), \qquad x\sqrt{\cos(2x)} = x\left(1 - x^2 + x^2\varepsilon_3(x)\right) = x - x^3 + x^3\varepsilon_2(x).$$

Par suite, $\sin(x) - x\sqrt{\cos(2x)} = 5x^3/6 + x^3\varepsilon_5(x)$ et comme $\lim_{x\to 0}\varepsilon_5(x) = 0$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x) - x\sqrt{\cos(2x)}}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{5}{6} + \varepsilon_5(x)\right) = \frac{5}{6}.$$

2. Pour tout $x > 0$, nous avons

$$g(x) = x^2\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1\right) = x^2\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \frac{1}{16x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{x}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right).$$

La droite d'équation $y = x/2 - 1/8$ est asymptote à la courbe lorsque $x \to +\infty$. De plus la courbe est au dessus de l'asymptote puisque $1/(16x)$ est positif quand $x \to +\infty$; $(1/x)\varepsilon(1/x)$ est négligeable devant $1/(16x)$ quand $x \to +\infty$ puisque $\lim_{x\to+\infty}\varepsilon(1/x) = 0$.

Exercice 5. Un DL à l'ordre 2 en 0 du numérateur et du dénominateur donne

$$n(x) = \left(x + x^2\right) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) + x^2\varepsilon_1(x), \qquad d(x) = x - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) + x^2\varepsilon_2(x)$$

et $\lim_{x\to 0} n(x)/d(x) = 3$.

Exercice 6. 1. $1/(1+y) = 1 - y + y^2 + y^2\varepsilon_1(y)$ d'où

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + x^4\varepsilon_2(x).$$

2. F est la primitive de f nulle en 0. En intégrant terme à terme le DL de f, on obtient

$$F(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + x^5\varepsilon_3(x).$$

Exercice 7 (bonus)**.** Il suffit en fait de calculer $U(1)$, $U(X)$ et $U(X^2)$:

$U(1) = 0\times 1 + 1\times X + (-1)\times X^2$, $\quad U(X) = 0\times 1 + 2\times X + 1\times X^2$, $\quad U(X^2) = 0\times 1 + 1\times X + 0\times X^2$.

La matrice de U dans la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$ est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$