Nom :
Prénom :

Outils Mathématiques 2 - UE7 en L1 PCGI
Contrôle n° 2-Correction

Jeudi 20 Mars 2008

12h45-13h30

Ce sujet comporte deux exercices indépendants.

Exercice 1.

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 7 \\ 4 & -2 & -7 \\ -4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

On note I_3 la matrice identité d'ordre 3 et O_3 la matrice nulle d'ordre 3.

1. *Calculer $A - I_3$ et $(A - I_3)^2$.*
2. *En déduire que $A^2 - 2A + I_3 = O_3$.*
3. *En déduire que A est inversible d'inverse $2I_3 - A$.*
4. *Montrer que la matrice $A - I_3$ n'est pas inversible (on pourra utiliser la question 1.).*

Proposition de correction.

1. $A - I_3 = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 7 \\ 4 & -3 & -7 \\ -4 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ et $(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. $(A - I_3)^2 = (A - I_3)(A - I_3) = A^2 - 2A + I_3$ donc d'après la question précédente, $A^2 - 2A + I_3 = O_3$
3. On a $-A^2 + 2A = I_3$ donc $A\,(2\,I_3 - A) = I_3 = (2I_3 - A)\,A$ donc A est inversible et son inverse est $2I_3 - A$.
4. Supposons que la matrice $A - I_3$ soit inversible et notons B son inverse, alors $B(A - I_3) = I_3$. De plus $(A - I_3)(A - I_3) = O_3$ d'après la question 1., donc en multipliant cette égalité par B, on obtient

$$B\,((A - I_3)(A - I_3)) = O_3$$

d'où par associativité de la multiplication matricielle, $(B(A - I_3))(A - I_3) = O_3$. Or $B(A - I_3) = I_3$, donc on obtient $I_3(A - I_3) = O_3$, ce qui est impossible.
Conclusion : La matrice $A - I_3$ n'est pas inversible.

Exercice 2.

On note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On considère l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z, t) = (X, Y)$ où $X = x - y - 2\,z + t$ et $Y = -2\,x + 3\,y + 4\,z - t$.

1. *Donner la matrice A de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.*
2. *Déterminer $Im(f)$. Quel est le rang de f ? Quelle est la dimension de $Ker(f)$? (bien justifier vos réponses)*
3. *On note $\nu_1 = (2, 0, 1, 0)$ et $\nu_2 = (-2, -1, 0, 1)$. Montrer que (ν_1, ν_2) est une base de $Ker(f)$ et que $\mathcal{C} = (\nu_1, \nu_2, e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.*
4. *Montrer que $\mathcal{C}' = (f(e_1), f(e_2))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.*
5. *Donner directement la matrice B de f dans les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.*
6. *(bonus) Donner la formule de changement de bases. A l'aide de cette formule, vérifier le résultat de la question précédente.*

Proposition de correction

1. On a $f(e_1) = (1, -2)$, $f(e_2) = (-1, 3)$, $f(e_3) = (-2, 4)$ et $f(e_4) = (1, -1)$ donc la matrice de f dans les bases canoniques est
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$
2. $Im(f)$ est l'espace vectoriel engendré par $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$ et $f(e_4)$. On cherche une base échelonnée pour $Im(f)$: $(1, -2), (0, 1)$ en est une donc $Im(f)$ est un espace vectoriel de dimension 2. Comme c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, on a $Im(f) = \mathbb{R}^2$.
Le rang de f est donc 2. D'après le théorème du rang, $dim(\mathbb{R}^4) = dim(Ker(f)) + rg(f)$ donc $dim(Ker(f)) = 2$.
3. On vérifie que $f(\nu_1) = f(\nu_2) = (0, 0)$ donc ν_1 et ν_2 sont dans $Ker(f)$. De plus ν_1 et ν_2 forment un système libre, en effet, soient λ_1, λ_2 dans $\mathbb{R}$ tels que $\lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_2 = 0$ alors
$$2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0, -\lambda_2 = 0, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$$
donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. De plus le système formé par ν_1 et ν_2 possède $dim(Ker(f)) = 2$ éléments donc (ν_1, ν_2) est une base de $Ker(f)$.
De même pour montrer que (ν_1, ν_2, e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^4$, il suffit de montrer que c'est un système libre puisqu'il a 4=$dim(\mathbb{R}^4)$ éléments : soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1\,\nu_1 + \lambda_2\,\nu_2 + \lambda_3\,e_1 + \lambda_4\,e_2 = 0$ alors $2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = -\lambda_2 + \lambda_4 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ donc $\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda_4 = \lambda_3 = 0$.
4. $\mathcal{C}'$ est un système libre de $\mathbb{R}^2$ (vu en 2.) et possède $2 = dim(\mathbb{R}^2)$ éléments donc c'est une base de $\mathbb{R}^2$.
5. On a $f(\nu_1) = f(\nu_2) = 0$ donc la matrice de f dans les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ est
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
6. D'après la formule de changement de bases, on a
$$A = M_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}(id) \times B \times M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(id)$$
Vérifions cette formule :
$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}(id) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$
$e_3 = \nu_1 - 2e_1$ et $e_4 = \nu_2 + 2e_1 + e_2$ donc
$$M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
On en déduit
$$B \times M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
puis
$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}(id) \times (B \times M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(id)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$