LICENCE SPM
1ÈRE ANNÉE, 2ÈME SEMESTRE
NOM, PRÉNOM :

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2007-2008
OM2, L32

Interrogation $n°1$
Jeudi 21 **février**
45 **minutes**

Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera rigoureusement chacune des réponses.

1. L'ensemble $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z = 0,\ x - z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. L'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
3. La famille $((2, -1, 1), (1, -3, 2))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
4. La famille $((2, -1, 1), (1, -3, 2))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
5. La famille $((2, -1, 1), (1, -3, 2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 Soient $v_1 = (1, 3, -1)$, $v_2 = (2, 1, 3)$ et $v_3 = (-1, 0, -2)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?
2. Donner une base du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$.

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$

1. Donner la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner (sans justification) une base et la dimension des deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$ suivants :
$$F_1 = \{2a + aX^2,\ a \in \mathbb{R}\},$$
$$F_2 = \{b + cX,\ b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}\}.$$
3. Démontrer que $\mathbb{R}_2[X] = F_1 \oplus F_2$.

Outils Mathématiques 2 : Correction rapide du CC1.

Exercice 1. 1. Montrons que E est sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$. Tout d'abord, E est non vide puisque $(0,0,0) \in E$. Soient $(x, y, z) \in E$, $(x', y', z') \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. On a

$$(y + \lambda y') + (z + \lambda z') = (y + z) + \lambda(y' + z') = 0, \quad (x + \lambda x') - (z + \lambda z') = (x - z) + \lambda(x' - z') = 0$$

ce qui montre que $(x, y, z) + \lambda(x', y', z') = (x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z') \in E$.

2. F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$. En effet, $(1,1)$ et $(1,-1)$ appartiennent à F mais $(2,0) = (1,1) + (1,-1)$ n'est pas un élément de F.

3. $\mathbf{R}^3$ est de dimension 3. Toute famille génératrice de $\mathbf{R}^3$ possède par conséquent au moins trois vecteurs : la famille $\{(2,-1,1),(1,-3,2)\}$ qui n'a que deux éléments n'est pas une famille génératrice.

4. La famille est libre. Soient λ et μ deux réels tels que $\lambda(2,-1,1) + \mu(1,-3,2) = (0,0,0)$. On a $2\lambda + \mu = 0$, $-\lambda - 3\mu = 0$, $\lambda + 2\mu = 0$. En additionnant, les deux dernières égalités, on obtient $-\mu = 0$ puis $\lambda = 0$.

5. Cette famille n'est pas une base puisqu'en dimension trois toute base a exactement trois éléments.

Exercice 2. Échelonnons les vecteurs v_1, v_2 et v_3 :

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & 3 & -1 & v_1 \\ 2 & 1 & 3 & v_2 \\ -1 & 0 & -2 & v_3 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|l} 1 & 3 & -1 & v_1' = v_1 \\ 0 & -5 & 5 & v_2' = v_2 - 2v_1 \\ 0 & 3 & -3 & v_3' = v_3 + xv_1 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|l} 1 & 3 & -1 & u_1 = v_1' \\ 0 & 1 & -1 & u_2 = -v_2'/5 \\ 0 & 0 & 0 & u_3 = v_3' + (3/5)v_2' \end{array}.$$

1. La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ n'est pas libre : $u_3 = (0,0,0)$!

2. Une base de $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v3)$ est : $\{(1,3,-1),(0,1,-1)\}$.

Exercice 3. 1. $\mathbf{R}_2[X]$ est de dimension 3.

2. Une base de F_1 est $2 + X^2$ qui est de dimension 1. Une base de F_2 est $\{1, X\}$; F_2 est de dimension 2.

3. Les trois polynômes 1, X et $2 + X^2$ sont libres puisque les degrés sont tous distincts. Ils forment donc une base de $\mathbf{R}_2[X]$ puisque $\dim \mathbf{R}_2[X] = 3$. Par conséquent, $\mathbf{R}_2[X] = F_1 \oplus F_2$.