TD1 - AN1
Corrigé des exercices

Exercice 1

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2} \iff 2ab \leq a^2+b^2$$
$$\iff a^2+b^2-2ab \geq 0$$
$$\iff (a-b)^2 \geq 0$$

Puisque $(a-b)^2 \geq 0$ est vraie, par équivalence,

$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ est vraie également.

Exercice 2

1) f est rationnelle, définie sur

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 2x-1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

2) • Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$, $x \neq 0$

$$f(x) = \frac{x^2}{2x-1} = \frac{x^2}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)} = \frac{x}{2-\frac{1}{x}}$$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

• $\lim\limits_{x \to 1/2} x^2 = \frac{1}{4}$

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} (2x-1) = 0^-$ donc $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} (2x-1) = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$

3) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

$$f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) = \frac{x^2}{2x-1} - \frac{2x+1}{4}$$

$$= \frac{4x^2 - (2x+1)(2x-1)}{4(2x-1)}$$

$$= \frac{1}{4(2x-1)}$$

$$\xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$$

Donc $\Delta : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$.

Position relative : on étudie le signe de $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)$

$\frac{1}{4} > 0$ donc $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)$ est du signe de $2x - 1$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)$		$-$	$\|\|$	$+$	

$\mathcal{C}_f$ est en dessous de Δ sur $]-\infty, 1/2[$ et au dessus sur $]1/2, +\infty[$.

4) f est rationnelle donc dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

$\forall x \neq \frac{1}{2}$

$$f'(x) = \frac{2x(2x-1) - 2x^2}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x}{(2x-1)^2}$$

$(2x-1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2x^2 - 2x = 2x(x-1)$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty \;\|\|\; +\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$f'(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 1$: nombre fini de solutions

f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et sur $[1, +\infty[$.

f est strictement décroissante sur $[0, 1/2[$ et sur $]1/2, 1]$.

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

. f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $]\frac{1}{2}, 1]$.

. $\lim\limits_{x \to 1/2^+} f(x) = +\infty$, $f(1) = 1$ et $n \in [1, +\infty[$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution sur $]\frac{1}{2}, 1]$.

Exercice 3

1) . $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est centré en 0.

. Soit $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $f(-x) = \tan(-x)\sin(-x)$

$$= -\tan(x) \times (-\sin(x))$$

$$= \tan(x) \times \sin(x)$$

$$= f(x).$$

Donc f est paire.

2) tan et sin sont dérivables sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc f également.

$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \sin(x) + \tan(x)\cos(x)$

$$= \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cos(x)$$

$$= \sin(x)\left(\frac{1}{\cos^2(x)} + 1\right)$$

3) • $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to \left(\pi/2\right)^-} \sin(x) = 1$

donc $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} f(x) = +\infty$

Puisque f est paire, $\lim\limits_{x \to (-\pi/2)^+} f(x) = +\infty$

• $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{1}{\cos^2(x)} + 1 > 0$

donc $f'(x)$ est du signe de $\sin(x)$.

x	$-\pi/2$		0		$\pi/2$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
f	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$ ‖

4) · f n'est pas majorée

· f admet un minimum en 0, qui vaut $f(0) = 0$.

5) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + 1\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $\frac{\pi}{4}$ est :

$$y = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}$$