TD1 - AN1
Corrigé des ADC

ADC 1

1) $f : x \mapsto x^2 + 7x^4$ est polynomiale donc définie sur $\mathbb{R}$

2) $f : x \mapsto \frac{2x+3}{x+7}$ est rationnelle. Elle est définie sur

$$\mathcal{D}_f = \{ x \in \mathbb{R} \mid x+7 \neq 0 \} = \mathbb{R} \setminus \{-7\}.$$

3) $f : x \mapsto x \ln(x)$

$x \mapsto x$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $]0, +\infty[$. Par produit, f est définie sur $]0, +\infty[$.

4) $f : x \mapsto \sqrt{\ln(x)}$

$x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $]0, +\infty[$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0, +\infty[$. Par composée, f est définie sur :

$$\mathcal{D}_f = \{ x \in]0, +\infty[\mid \ln(x) \in [0, +\infty[\}$$
$$= [1, +\infty[$$

car :

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	

ADC 2

1) $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi - 3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

ou

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$$
$$= 1 - \frac{2 + 2\sqrt{12} + 6}{16}$$
$$= \frac{8 - 2\sqrt{12}}{16}$$
$$\overset{*}{=} \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

* $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

Puisque $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$ $\left(\text{car } \frac{\pi}{12} \in [0, \frac{\pi}{2}]\right)$, alors

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

Rq : Les deux expressions sont bien égales car

$$\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{6 - 2\sqrt{12} + 2}{16} = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{16} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

2) $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) \overset{*}{=} 2\cos^2(a) - 1$ donc $\cos^2(a) = \frac{\cos(2a) + 1}{2}$

* $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$
$\sin^2(a) = 1 - \cos^2(a)$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\cos\left(\pi/4\right) + 1}{2} = \frac{\sqrt{2}/2 + 1}{2} = \frac{\sqrt{2} + 2}{4}$$

Donc $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{2} + 2}}{2}$ car $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$.

ADC 3

* • $\cos$ et $x \mapsto 5x$ sont définies sur $\mathbb{R}$ donc $x \mapsto \cos(5x)$ aussi.

• $x \mapsto 1-x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$ (polynomiale) et $\ln$ sur $]0,+\infty[$.

Par composée, $x \mapsto \ln(1-x^2)$ est définie sur

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 1-x^2>0\} =]-1,1[$$

car

$1-x^2 = (1-x)(1+x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Par somme, f est définie sur $]-1,1[$.

* . $]-1,1[$ est centré en 0

. Soit $x \in]-1,1[$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \cos(-5x) + \ln(1-(-x)^2) \\ &= \cos(5x) + \ln(1-x^2) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc f est paire.

ADC 4

1) F.I « $\infty - \infty$ » $\rightarrow$ on factorise par le terme dominant

Soit $x > 0$

$$3x^2 - e^x = e^x \left(3 \frac{x^2}{e^x} - 1 \right)$$

FI « $\frac{\infty}{\infty}$ »

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$ par croissance comparée

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 \frac{x^2}{e^x} - 1 \right) = -1$.

De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Ainsi

$$\lim_{x \to +\infty} \left(3x^2 - e^x \right) = -\infty \quad \text{par produit.}$$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3x^2 - e^x \right) = +\infty$

F.I « $0 \times \infty$ »

3) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \ln(x) = 0$ par croissance comparée

4) $\lim\limits_{x \to 2^-} (5x + 1) = 11$

$4 - x^2 = (2 - x)(2 + x)$

$\lim\limits_{x \to 2^-} (4 - x^2) = 0^+$ car

x	$-\infty$		-2		2 (2^-)		$+\infty$
$4 - x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc, par quotient

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{5x + 1}{4 - x^2} = +\infty$$

5) ⚠ Puissance variable $\rightarrow$ forme exponentielle

$$x^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x} \ln(x) \right) = \exp\left(\frac{\ln(x)}{x} \right)$$

f.I « $\frac{\infty}{\infty}$ »

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée

De plus $\lim\limits_{x \to 0} e^x = 1$ donc par composée

$$\lim_{x \to +\infty} x^{1/x} = 1.$$

ADC 5

1) $f'(x) = \dfrac{-1/x}{\ln(x)^2} = -\dfrac{1}{x\ln(x)^2}$

2) $f'(x) = 2 \times 2 \times (2x+5) = 4(2x+5)$ $\quad (u^2)' = 2u'u^2$

ou

$f(x) = 4x^2 + 20x + 25$ donc $f'(x) = 8x + 20$

3) $f'(x) = 3x^2 \cos(5x) + x^3 \times \left(-5\sin(5x)\right)$

$= 3x^2\cos(5x) - 5x^3\sin(5x)$

4) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \exp\left(\sqrt{x}\right)$

5) $f'(x) = 2x \times \dfrac{1}{\cos^2(x^2)} \overset{\text{ou}}{=} 2x\left(1 + \tan^2(x^2)\right)$

ADC 6

1) $\dfrac{x-1}{x+1} < \dfrac{2}{x-1}$

- Domaine de définition : $x \mapsto \dfrac{x-1}{x+1}$ et $x \mapsto \dfrac{2}{x-1}$ sont rationnelles. Le domaine de définition est :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x+1 \neq 0 \text{ et } x-1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

- Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$$\frac{x-1}{x+1} < \frac{2}{x-1} \iff \frac{x-1}{x+1} - \frac{2}{x-1} < 0$$

$$\iff \frac{(x-1)^2 - 2(x+1)}{(x+1)(x-1)} < 0$$

$$\iff \frac{x^2-4x-1}{(x+1)(x-1)} < 0$$

$x^2 - 4x - 1$: $\Delta = 16 + 4 = 20$ $\qquad \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$

racines : $\dfrac{4 - 2\sqrt{5}}{2} = 2 - \sqrt{5}$ et $2 + \sqrt{5}$

Tableau de signe :

$(x+1)(x-1) = x^2 - 1$

x	$-\infty$		-1		$2-\sqrt{5}$		1		$2+\sqrt{5}$		$+\infty$
x^2-4x-1		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x+1)(x-1)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$\dfrac{x^2-4x-1}{(x+1)(x-1)}$		$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions est : $]-1, 2-\sqrt{5}[\; \cup \;]1, 2+\sqrt{5}[$

2) - $x \mapsto x^3 + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$

$$x^3 + 1 \leq 0 \iff x^3 \leq -1$$

$$\iff x^3 \leq (-1)^3$$

$$\iff x \leq -1$$ car $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3) • $x \longmapsto x-1$ et $x \mapsto x^2+2$ sont définies sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0,+\infty[$.

Domaine de définition :

$x^2+2 \geq 0$. $\quad \{x \in \mathbb{R} \mid x-1 \geq 0 \text{ et } x^2+2 \geq 0\} = [1,+\infty[$

• Soit $x \geq 1$

$0 \leq \sqrt{x-1} \leq \sqrt{x^2+2} \iff x-1 \leq x^2+2$ car $x \mapsto x^2$ (ou $x \mapsto \sqrt{x}$) est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$\iff x^2-x+3 \geq 0$

$\Delta = 1-12 < 0$. donc $x^2-x+3 \geq 0$ est toujours vraie.

L'ensemble des solutions est $[1,+\infty[$.

ADC 7

- Soit $x>0$. $\qquad \ln(x) \leq x-1 \iff \ln(x) - x + 1 \leq 0$
- Soit $f : x \mapsto \ln(x) - x + 1$. Par somme de $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto -x+1$, f est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$.

  Soit $x>0$.

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

Or $x>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1-x$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

f est croissante sur $]0,1]$ et décroissante sur $[1,+\infty[$

donc admet un maximum en 1 :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) \leq f(1) \qquad \text{avec } f(1) = 0-1+1 = 0$$

Ainsi $\forall x>0$, $\quad \ln(x) - x + 1 \leq 0$

soit : $\qquad \ln(x) \leq x-1$

ADC 8

- $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ et $x \mapsto x + \frac{3}{4}$ sont définies sur $\mathbb{R}$.

  Domaine de définition : $\mathbb{R}$

- Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\left\lfloor x + \frac{3}{4} \right\rfloor = 2 \iff 2 \leq x + \frac{3}{4} < 3$$
$$\iff \frac{5}{4} \leq x < \frac{9}{4}$$

$$\mathcal{S} = \left[\frac{5}{4}, \frac{9}{4} \right[$$

ADC 9

1) Domaine de définition : $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$|x+1| < 4 \iff -4 < x+1 < 4$$
$$\iff -5 < x < 3$$

$$\mathcal{S} =]-5, 3[$$

2) Domaine de définition : $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$|2x+3| > 6 \iff 2x+3 > 6 \quad \text{ou} \quad 2x+3 < -6$$
$$\iff 2x > 3 \quad \text{ou} \quad 2x < -9$$
$$\iff x > \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad x < -\frac{9}{2}$$

$$\mathcal{S} = \left]-\infty, -\frac{9}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[.$$