TD4 – AL2

Sommes et produits

Applications directes du cours

ADC1 Calculer (on attend un résultat simplifié) avec $n \in \mathbb{N}$:

$$S_1 = \sum_{k=1}^{4} 2k \qquad S_2 = \sum_{\ell=0}^{4} \ell\,! \qquad A_n = \frac{(n+1)!}{n!} \qquad B_n = \frac{(n+2)!}{n!} \qquad C_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1}$$

ADC2 Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

ADC3 Déterminer $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} (2+3k)$, $\quad T_n = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} e^{\ell+1}$.

ADC4 Calculer $D_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n \times (n+1)$ et $E_n = 1^2 + 3^2 + \cdots + (2n+1)^2$.

ADC5 En remarquant que $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

ADC6 Écrire la formule donnant $(a+b)^6$.

ADC7 Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i^2 + j)$ et $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (i+j)$.

Exercices

Exercice 1 On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+n^2}}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n+1}{\sqrt{n+n^2}} \leqslant S_n \leqslant \dfrac{n+1}{n}$.
2. En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante. Quels sont alors les comportements asymptotiques possibles pour la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
3. En déduire, en raisonnant par l'absurde, que $H_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 3 Montrer que les suites $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad T_n = S_n + \frac{1}{n\,n!}$$

sont adjacentes.

Exercice 4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 2\pi[$. Calculer les sommes suivantes.

1. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikx}$
2. $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{ikx}$
3. $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$
4. $C = \displaystyle\sum_{k=1}^{50} \cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)$.

Pour aller plus loin

Exercice 5 Calculer les sommes suivantes :

1. $B_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$. On commencera par montrer que, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$. *On fera apparaitre des télescopages.*
3. $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \min(i, j)$

Exercice 6 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n \geqslant 1}$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, on a : $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k(k-1)}$.
3. En déduire que $u_n \leqslant 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. *On pourra s'inspirer de l'ADC 5.*
4. Montrer la convergence de $(u_n)_{n \geqslant 1}$.

Exercice 7 **Exemple de récurrence forte**
On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k.$$

1. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par *récurrence forte*, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{n-1}$.
   Attention, non valable en $n = 0$.
   Le principe de récurrence forte sur $n \geqslant 1$:
   Initialisation : on prouve que la propriété est vraie au rang $n = 1$.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la propriété est vraie pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ (hypothèse de récurrence forte). On montre alors que la propriété est vraie au rang $n + 1$.
2. Retrouver ce résultat sans utiliser de récurrence (et beaucoup plus rapidement !).