TD4 – AL2

CORRIGÉ DES "POUR ALLER PLUS LOIN"

Exercice 5 Calculer les sommes suivantes :

1. Soient $1 \leqslant k \leqslant n$, avec k, n des entiers.

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(k-1)!\big((n-1)-(k-1)\big)!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

$$\begin{aligned}
B_n &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} \\
&= n \sum_{\substack{\ell=0 \\ (\ell=k-1)}}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} \\
&= n\sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} 1^{\ell} \times 1^{(n-1)-\ell} \\
&= n(1+1)^{n-1} && \text{par la formule du binôme} \\
&= n2^{n-1}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k \times k! &= \sum_{k=1}^{n} (k+1-1) \times k! \\
&= \sum_{k=1}^{n} ((k+1) \times k! - k!) \\
&= \sum_{k=1}^{n} ((k+1)! - k!) \\
&= (n+1)! - 1! && \text{par télescopage} \\
&= (n+1)! - 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) \\
&= \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+1)!} && \text{par télescopage} \\
&= 1 - \frac{1}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\min(i,j)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}\min(i,j) + \sum_{j=i+1}^{n}\min(i,j)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{i} j}_{\text{ici } j\leqslant i} + \underbrace{\sum_{j=i+1}^{n} i}_{\text{ici } j>i}\Big)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2} + i\times(n-i)\right)\\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{2n+1}{2}\sum_{i=1}^{n} i\\
&= -\frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2n+1}{2}\frac{n(n+1)}{2}\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

Exercice 6 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$u_{n+1} - u_n = \left(u_n + \frac{1}{(n+1)^2}\right) - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$$
donc (u_n) est croissante.

2. Soit $k \geqslant 2$.
$$0 < k-1 \leqslant k \text{ donc } (k>0)\ \ 0 < k(k-1) \leqslant k^2.$$
Par passage à l'inverse
$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}.$$

3. De l'inégalité précédent, on déduit, par croissance de la somme
$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}.$$
Attention, l'inégalité n'était valable que pour $k \geqslant 2$, donc on somme bien à partir de $k = 2$.
En reprenant la méthode de l'ADC5.
$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$
par télescopage.
$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leqslant 2$$

4. (u_n) est croissante et majorée par 2 donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge.

Exercice 7 **Exemple de récurrence forte**

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k.$$

1. Démontrons, à l'aide d'un raisonnement par *récurrence forte*, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 2^{n-1}$.
   Initialisation : pour $n = 1$,
   $$u_1 = \sum_{k=0}^{0} u_k = u_0 = 1 + 2^0$$
   donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $u_k = 2^{k-1}$ (attention, ce n'est pas vrai en $k = 0$). Alors
   $$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= u_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k && \text{(on met de côté } u_0\text{)} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} \\ &= 1 + \sum_{\ell=0}^{n-1} 2^{\ell} \\ &= 1 + \frac{1-2^n}{1-2} \\ &= 1 - \times(1-2^n) \\ &= 2^n \end{aligned}$$
   Conclusion : par récurrence forte, $u_n = 2^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Pour $n \geqslant 1$
   $$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} u_k + u_n = u_n + u_n = 2u_n$$
   (toujours pas vrai en $n = 0$ car la relation $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ n'est vraie que pour $n \geqslant 1$)
   donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique de raison 2. Puisque $u_1 = 1$,
   $$\forall n \geqslant 1,\quad u_n = 2^{n-1}.$$