TD4 – AL2

Corrigé des exercices

Exercice 1 On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+n^2}}$.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$.

$$\begin{aligned}
& 0 \leqslant k \leqslant n \\
\text{donc } & n^2 \leqslant k + n^2 \leqslant n + n^2 \\
\text{donc } & \sqrt{n^2} \leqslant \sqrt{k+n^2} \leqslant \sqrt{n+n^2} && \text{car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est strictement croissante sur } [0, +\infty[\\
\text{donc } & \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{\sqrt{k+n^2}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n+n^2}} && \text{car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est strictement décroissante sur }]0, +\infty[\\
& && \text{et } \sqrt{n^2} = n \text{ (car } n \geqslant 0).
\end{aligned}$$

Par croissance de la somme,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+n^2}} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+n^2}} \\
\text{donc } & \frac{1}{n} \times (n+1) \geqslant S_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{n+n^2}} \times (n+1) \\
\text{donc } & \frac{n+1}{\sqrt{n+n^2}} \leqslant S_n \leqslant \frac{n+1}{n}
\end{aligned}$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

et

$$\frac{n+1}{\sqrt{n+n^2}} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^2}\sqrt{\frac{1}{n}+1}} = \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}+1}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

D'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = 1.$$

Exercice 2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
H_{n+1} - H_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{n+1} \\
&\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Donc (H_n) est croissante. D'après le théorème de la limite monotone, (H_n) admet une limite qui peut être soit réelle soit égale à $+\infty$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} H_{2n} - H_n &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Soit $k \in [\![n+1, 2n]\!]$.

$$\begin{aligned} & n+1 \leqslant k \leqslant 2n \\ \text{donc} \quad & \frac{1}{n+1} \geqslant \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n} \qquad \text{car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est strictement décroissante sur }]0, +\infty[. \end{aligned}$$

Par croissance de la somme (on ne garde que la 2e inégalité ici)

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \times (2n - (n+1) + 1)$$

donc

$$H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}.$$

3. On a vu à la quesiton 1) que (H_n) admet une limite qui peut être soit réelle soit égale à $+\infty$. Supposons, par l'absurde, que (H_n) tende vers un réel ℓ.

On a

$$H_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \quad \text{et} \quad H_{2n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Puisque ℓ est un réel

$$H_{2n} - H_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ceci est absurde car $H_{2n} - H_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

On en déduit que l'hypothèse de départ est fausse : (H_n) ne tend par vers un réel. Nécessairement,

$$\lim_{n \to +\infty} H_n = +\infty.$$

Exercice 3 **Monotonie de (S_n) :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $S_{n+1} - S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$.

Donc la suite (S_n) est croissante.

Monotonie de (T_n) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= (S_{n+1} - S_n) + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n(n)!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n(n)!} \\ &= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0 \end{aligned}$$

Donc la suite (T_n) est décroissante.

Limite de $(T_n - S_n)$ **:**

$$T_n - S_n = \frac{1}{n(n)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Conclusion : les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Exercice 4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 2\pi[$. Calculer les sommes suivantes.

1. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{e}^{ix})^k = \frac{1-(\mathrm{e}^{ix})^{n+1}}{1-\mathrm{e}^{ix}}$ car $\mathrm{e}^{ix} \neq 1$ $(x \in]0, 2\pi[)$.

2.

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{ikx} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (\mathrm{e}^{ix})^k 1^{n-k} && \text{attention il manque le terme } k=0 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\mathrm{e}^{ix})^k 1^{n-k} - \underbrace{\binom{n}{0} (\mathrm{e}^{ix})^0 1^{n-0}}_{k=0} \\
&= (\mathrm{e}^{ix} + 1)^n - 1
\end{aligned}$$

d'après la formule du binôme de Newton.

3. $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$ d'après la formule du binôme de Newton.

4.

$$\begin{aligned}
C &= \sum_{k=1}^{50} \cos\left(\frac{k\pi}{5}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{50} \frac{\mathrm{e}^{ik\pi/5} - \mathrm{e}^{-ik\pi/5}}{2} && \text{(formule d'Euler)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{50} \mathrm{e}^{ik\pi/5} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{50} \mathrm{e}^{-ik\pi/5} && \text{(par linéarité)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{50} \left(\mathrm{e}^{i\pi/5}\right)^k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{50} \left(\mathrm{e}^{-i\pi/5}\right)^k \\
&= \frac{1}{2} \mathrm{e}^{i\pi/5} \frac{1-\left(\mathrm{e}^{i\pi/5}\right)^{50}}{1-\mathrm{e}^{i\pi/5}} - \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-i\pi/5} \frac{1-\left(\mathrm{e}^{-i\pi/5}\right)^{50}}{1-\mathrm{e}^{-i\pi/5}} && \text{car } \mathrm{e}^{i\pi/5} \neq 1,\ \mathrm{e}^{-i\pi/5} \neq 1 \\
&= \frac{1}{2} \mathrm{e}^{i\pi/5} \frac{1-\mathrm{e}^{10i\pi}}{1-\mathrm{e}^{i\pi/5}} - \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-i\pi/5} \frac{1-\mathrm{e}^{-10i\pi}}{1-\mathrm{e}^{-i\pi/5}} \\
&= \frac{1}{2} \mathrm{e}^{i\pi/5} \frac{1-1}{1-\mathrm{e}^{i\pi/5}} - \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-i\pi/5} \frac{1-1}{1-\mathrm{e}^{-i\pi/5}} \\
&= 0
\end{aligned}$$