TD 4L2
Corrigé des ADC

ADC 1

$$S_1 = \sum_{k=1}^{4} 2k = 2\times 1 + 2\times 2 + 2\times 3 + 2\times 4$$
$$= 2 + 4 + 6 + 8$$
$$= 20$$

$$S_2 = \sum_{l=0}^{4} l! = 0! + 1! + 2! + 3! + 4!$$
$$= 1 + 1 + 2 + 6 + 24$$
$$= 34$$

$$A_n = \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1)\ n!}{n!} = n+1 \qquad \text{(vu en cours)}$$

$$B_n = \frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(1\times 2 \times \cancel{\cdots} \times n)\times (n+1)\times (n+2)}{(1\times 2\times \cancel{\cdots} \times n)}$$

$$= (n+1)(n+2)$$

ou :

$$B_n = \frac{(n+2)(n+1)\ n!}{n!} = (n+2)(n+1)$$

$$C_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1} = \underbrace{\frac{1}{\cancel{2}}}_{i=1} \times \underbrace{\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}}_{i=2} \times \underbrace{\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}}_{i=3} \times \cdots \times \underbrace{\frac{\cancel{n-1}}{\cancel{n}}}_{i=n-1} \times \underbrace{\frac{\cancel{n}}{n+1}}_{i=n}$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

ou

$$C_n = \frac{\prod_{i=1}^{n} i}{\prod_{i=1}^{n}(i+1)} = \frac{1\times 2\times \cdots \times n}{2\times 3\times \cdots \times (n+1)} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

ADC 2

Notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrons par récurrence que $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : si $n = 1$.

$S_1 = 1^3 = 1$ et $\frac{1^2 \times 2^2}{4} = 1$ donc $S_1 = \frac{1^2 \times 2^2}{4}$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Alors $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k^3$

$= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3$ on sort le dernier terme

$= S_n + (n+1)^3$

$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$

$= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4}$

$= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$

$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

ADC 3

+ $u_k = 2 + 3k$: (u_k) est une suite arithmétique.

D'après le cours :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k = \frac{u_2 + u_n}{2} \times (\text{Nombre de termes})$$

$$= \frac{8 + 2 + 3n}{2} \times (n-1)$$

$$= \frac{(10+3n)(n-1)}{2} = \frac{3n^2 + 7n - 10}{2}$$

$\underline{2^e \text{ méthode}}$:

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} (2+3k)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} 2 + 3 \sum_{k=2}^{n} k \qquad \text{par linéarité}$$

$$= 2 \times \underbrace{(n-1)}_{\text{Nombre de termes}} + 3 \left(\sum_{k=1}^{n} k - \underbrace{1}_{\text{terme } k=1} \right)$$

$$= 2(n-1) + 3\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right)$$

$$= \frac{4(n-1)}{2} + 3 \, \frac{n^2+n-2}{2}$$

$$= \frac{3n^2 + 7n - 10}{2}$$

$*$ $u_\ell = e^{\ell+1} = e \times e^\ell$ $\quad(u_\ell)$ est une suite géométrique de raison $e \neq 1$

D'après le cours

$$T_n = \sum_{\ell=0}^{n} u_\ell = u_0 \times \frac{1-e^{n+1}}{1-e} = e \, \frac{1-e^{n+1}}{1-e}$$

$\underline{\text{ou}}$

$$T_n = \sum_{\ell=0}^{n} (e \times e^\ell) = e \sum_{\ell=0}^{n} e^\ell \qquad \text{par linéarité}$$

$$= e \times \frac{1-e^{n+1}}{1-e} \qquad \text{car } e \neq 1.$$

ADC 4

$$D_n = 1\times 2 + 2\times 3 + \dots + n \times (n+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (k^2+k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k \qquad \text{par linéarité}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} = \frac{n^3+3n^2+2}{3} \quad \leftarrow$$

⚠ J'ai par erreur écrit un résultat erroné au tableau.

$$E_n = 1^2 + 3^2 + \dots + (2n+1)^2$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (4k^2 + 4k + 1)$$

$$= 4 \sum_{k=0}^{n} k^2 + 4 \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 \quad \text{par linéarité}$$

$$= 4 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{(n+1)(2n(2n+1) + 6n + 3)}{3}$$

$$= \frac{(n+1)(4n^2 + 8n + 3)}{3} = \frac{4n^3 + 12n^2 + 11n + 3}{3}$$

ADC 5

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \quad \text{par télescopage}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

ADC 6

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Donc

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

ADC 7

$$\sum_{1\le i,j\le n} (i^2+j) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(i^2+j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \underset{\uparrow \text{ constante}}{i^2} + \sum_{j=1}^{n} j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(i^2\times n + \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= n\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n}\frac{n(n+1)}{2}$$

constante

$$= n\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\times n$$

$$= \frac{n^2(n+1)\,(2n+1+3)}{6}$$

$$\frac{2n+6}{6} = \frac{n+2}{3}$$

$$= \frac{n^2(n+1)(n+2)}{3}$$

$$= \frac{n^4+2n^2+3n^3}{3}$$

$$\sum_{1\le i<j\le n}(i+j) = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n}\overbrace{(i+j)}^{=u_j}\right)$$

$u_j = i+j$ (i : constante)

suite arithmétique.

$u_{i+1} = 2i+1$

$u_n = i+n$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}\frac{(2i+1)+(i+n)}{2}\times\left(n-(i+1)+1\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}\frac{(3i+n+1)(n-i)}{2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{-3i^2+i(2n-1)+n(n+1)}{2}\right)$$

$$= -\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n-1} i^2 + \frac{(2n-1)}{2}\sum_{i=1}^{n-1} i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} n(n+1)$$

$$= -\frac{3}{2}\,\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{2n-1}{2}\,\frac{(n-1)n}{2} + \frac{1}{2}n(n+1)(n-1)$$

$$= -\cancel{\frac{n(n-1)(2n-1)}{4}} + \cancel{\frac{n(n-1)(2n-1)}{4}} + \frac{n(n+1)(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n-1)(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n^3-n}{2}$$