TD3 – AN2

Suites réelles

Applications directes du cours

ADC1 Dans chaque cas, donner les premiers termes de la suite jusqu'à u_3.

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n+1}{2n+1}$.

b) $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2^n$.

c) $u_0 = 1$, $u_1 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_n - u_{n+1}$.

ADC2 Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_n = \dfrac{n}{2^n}$.

ADC3

1. Donner le terme général de la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de premier terme -3 et de raison 5.
2. Donner le terme général de la suite géométrique $(u_n)_{n\geqslant 2}$ de premier terme 4 et de raison $\dfrac{1}{2}$.

ADC4 Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$u_0 = 2, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n + 7.$$

ADC5 Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n.$$

ADC6 Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

ADC7 Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n.$$

ADC8 Montrer que les suites suivantes admettent une limite que l'on précisera.

1. $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n^2-1}$;
2. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$;
3. $u_n = \dfrac{2^n - 3^n}{n^5 + 3^n}$
4. $u_n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n$

ADC9 Montrer que les suites suivantes admettent une limite que l'on précisera.

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$;
2. $u_n = \dfrac{n^2+n-1}{n^2 - n\cos(n)}$;
3. $u_n = \ln(n) + \sin(n)$.

Exercices

Exercice 1 On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \text{ et } v_{n+1} = 2u_n + 3v_n.$$

1. Montrer que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Préciser sa valeur.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
3. Déterminer les termes généraux des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2 Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1. Étudier le signe de $g : x \mapsto \sqrt{2+x} - x$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
3. Étudier le sens de variation de u.
4. Montrer que u est convergente. Déterminer la valeur de sa limite ℓ.

Exercice 3 On considère la fonction $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$.

1. Étudier les variations de f.
2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
   Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe bien et que $u_n \leqslant -1$.
3. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer, par l'absurde, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Que dire alors de sa limite ?

Exercice 4 On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 12$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

1. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $w_n = v_n - u_n$ est géométrique.
2. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers un même réel.

Pour aller plus loin

Exercice 5 **Suite implicite**
Soit $n \in \mathbb{N}$. On notera, pour $x > 0$, $f_n(x) = nx + \ln(x)$.

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $nx + \ln(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0, 1]$. On notera cette solution x_n.

   On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \in]0, 1]$ et $nx_n + \ln(x_n) = 0$ (ce qui s'écrit aussi $f_n(x_n) = 0$).
2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad x_{n+1} \leqslant x_n \iff f_{n+1}(x_{n+1}) \leqslant f_{n+1}(x_n)$.
3. En déduire le sens de variation de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis montrer que cette suite converge vers un réel $\ell \in [0, 1]$.
4. On souhaite démontrer par l'absurde que $\ell = 0$. On suppose donc que $\ell \in]0, 1]$. Montrer que la relation $nx_n + \ln(x_n) = 0$ entraîne alors une contradiction. Conclure.