TD3 – AN2

CORRIGÉ DES "POUR ALLER PLUS LOIN"

Exercice 5 Suite implicite
Soit $n \in \mathbb{N}$. On notera, pour $x > 0$, $f_n(x) = nx + \ln(x)$.

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $nx + \ln(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0, 1]$. On notera cette solution x_n.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ par somme et pour tout $x > 0$

   $$f_n'(x) = n + \frac{1}{x} > 0.$$

   donc la fonction f_n est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
   De plus, par somme $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = -\infty$ et $f(1) = n$.
   Sur l'intervalle $]0, 1]$:

   - *f_n est continue (car dérivable) ;*
   - *f_n est strictement croissante ;*
   - $0 \in]-\infty, n] = \left]\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x), f(1)\right]$.

   D'après le théorème de la bijection, l'équation $f_n(x) = 0$ (c'est-à-dire $nx + \ln(x) = 0$) admet une unique solution dans $]0, 1]$.

   On note cette solution x_n.

   On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \in]0, 1] \quad$ et $\quad nx_n + \ln(x_n) = 0$ (ce qui s'écrit aussi $f_n(x_n) = 0$).

2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad x_{n+1} \leqslant x_n \iff f_{n+1}(x_{n+1}) \leqslant f_{n+1}(x_n)$.

   On a montré que f_n était strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc la fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Or $x_n > 0$ et $x_{n+1} > 0$ donc

   $$x_{n+1} \leqslant x_n \iff f_{n+1}(x_{n+1}) \leqslant f_{n+1}(x_n).$$

3. En déduire le sens de variation de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis montrer que cette suite converge vers un réel $\ell \in [0, 1]$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ (voir fin de la question 1) et $f_{n+1}(x_n) = (n+1)x_n + \ln(x_n) = (nx_n + \ln(x_n)) + x_n = f_n(x_n) + x_n = 0 + x_n = x_n$. Puisque $x_n > 0$, on en déduit que

   $$f_{n+1}(x_{n+1}) \leqslant f_{n+1}(x_n).$$

   D'après l'équivalence de la question 2, ceci permet de dire que

   $$x_{n+1} \leqslant x_n.$$

   Ainsi, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   Elle est de plus minorée par 0 donc, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel ℓ.
   Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < x_n \leqslant 1$ donc par passage à la limite $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.
   Attention : les inégalités deviennent larges (non strictes) quand on passe à la limite.

4. On souhaite démontrer par l'absurde que $\ell = 0$. On suppose donc que $\ell \in]0,1]$. Montrer que la relation $nx_n + \ln(x_n) = 0$ entraîne alors une contradiction. Conclure.

   On suppose, par l'absurde, que $\ell \in]0,1]$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $nx_n + \ln(x_n) = 0$.
   Or $nx_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *(car* ℓ *est un réel strictement positif – si* ℓ *était nul, on aurait une forme indéterminée) et* $\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(\ell) \in \mathbb{R}$ *(même raison). On a donc*

$$nx_n + \ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

   ce qui est absurde car $nx_n + \ln(x_n) = 0$.

   On en déduit que l'hypothèse de départ est fausse : $\ell \notin]0,1]$. *Nécessairement,* $\ell = 0$.