TD3 – AN2

Corrigé des exercices

Exercice 1

1. Notons $w_n = v_n - u_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+1} - w_n = v_{n+1} - u_{n+1} - v_n + u_n = 2u_n + 3v_n - 3u_n - 2v_n - v_n + u_n = 0$$

Donc la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et sa valeur est $w_0 = v_0 - u_0 = 1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n - u_n = 1.}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n = 3u_n + 2(1 + u_n) = 5u_n + 2$$

Donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite arithmético-géométrique.}}$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x = 5x + 2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = u_n + \frac{1}{2}$.

$$t_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2} = 5u_n + 2 + \frac{1}{2} = 5\left(t_n - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2} = 5t_n.$$

Ceci montre que la suite (t_n) est géométrique de raison 5 et de premier terme $t_0 = u_0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n = \frac{3}{2} \times 5^n.$$

Or, $u_n = t_n - \frac{1}{2}$, donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{3}{2} \times 5^n - \frac{1}{2}.}$$

De plus, $v_n = 1 + u_n$, donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{3}{2} \times 5^n + \frac{1}{2}.}$$

Exercice 2

1. Soit $g : x \mapsto \sqrt{2 + x} - x$.

   - **Ensemble de définition** : La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$. Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto 2 + x$ sont définies sur $\mathbb{R}$. Par composée et différence, g est définie sur

$$\mathcal{D}_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 2 \geqslant 0\} = [-2, +\infty[.$$

   Présentons 3 méthodes pour l'étude du signe de g

   - **Méthode 1 : Résolution de $g(x) \geqslant 0$.**
     Soit $x \geqslant -2$.

$$g(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \sqrt{2 + x} \geqslant x.$$

– Sur $[-2,0[$, $x<0$ et $\sqrt{2+x}\geqslant 0$, donc $\sqrt{2+x}\geqslant x$ est vraie et donc $g(x)\geqslant 0$.
– Sur $[0,+\infty[$,

$$\begin{aligned} g(x)\geqslant 0 &\Leftrightarrow \sqrt{2+x}\geqslant x \\ &\Leftrightarrow 2+x\geqslant x^2 \qquad \text{car } x\mapsto x^2 \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+ \\ &\Leftrightarrow x^2-x-2\leqslant 0 \end{aligned}$$

Le trinôme x^2-x-2 a pour discriminant $\Delta=9$ et pour racines $x_1=-1$ et $x_2=2$.

x	0		2		$+\infty$
x^2-x-2		$-$	0	$+$	
signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	

On en déduit le signe de g global :

x	-2		2		$+\infty$
signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	

- **Méthode 2 : quantité conjuguée**.
  – Si $x\in[-2,0]$, $\sqrt{2+x}\geqslant 0$ et $-x\geqslant 0$, donc $g(x)\geqslant 0$.
  – Si $x\in]0,+\infty[$.

$$g(x)=\frac{(\sqrt{2+x}-x)(\sqrt{2+x}+x)}{\sqrt{2+x}+x}=\frac{2+x-x^2}{\sqrt{2+x}+x}.$$

Or $\sqrt{2+x}+x>0$ donc $g(x)$ a le même signe que le trinôme $2+x-x^2$.

x	0		2		$+\infty$
$2+x-x^2$		$+$	0	$-$	

On en déduit le signe de g global :

x	-2		2		$+\infty$
signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	

- **Méthode 3 : Étude de la fonction** g.
  La fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Les fonction $x\mapsto x$ et $x\mapsto 2+x$ sont définies et dérivable sur $\mathbb{R}$. Par composée et différence, g est définie sur

$$\mathcal{D}_g=\{x\in\mathbb{R}\mid x+2\geqslant 0\}=[-2,+\infty[$$

et dérivable sur

$$\mathcal{D}'_g=\{x\in\mathbb{R}\mid x+2>0\}=]-2,+\infty[.$$

Soit $x>-2$. $g'(x)=\dfrac{1-2\sqrt{2+x}}{2\sqrt{2+x}}$ est du signe de $1-2\sqrt{2+x}$. Or,

$$1-2\sqrt{2+x}\geqslant 0\Leftrightarrow 2\sqrt{2+x}\leqslant 1\Leftrightarrow 4(2+x)\leqslant 1\Leftrightarrow x\leqslant -\frac{7}{4}$$

par stricte croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$.

x	-2		$-\frac{7}{4}$		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	

Limite en $+\infty$. Soit $x > 0$ (on a alors $x = \sqrt{x^2}$).

$$g(x) = x\left(\sqrt{\frac{2+x}{x^2}} - 1\right) = x\left(\sqrt{\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}} - 1\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

On remarque aussi que $g(2) = 0$.
On obtient alors le tableau suivant

x	-2		$-\frac{7}{4}$		2		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$		$-$	
g	2	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

donc le signe de g est donné par

x	-2		2		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

2. Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

Initialisation : $u_0 = 0$ existe et on a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant 2$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n existe et $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
Alors $2 + u_n \geqslant 0$, donc $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ existe. De plus,

$$u_n \leqslant 2 \text{ donc } u_n + 2 \leqslant 4 \text{ donc } 0 \leqslant \sqrt{u_n + 2} \leqslant 2$$

par croissance de la fonction racine carrée. Ainsi, on a bien $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2 + u_n} - u_n = g(u_n)$$

Or, $u_n \in [0, 2]$ donc d'après la question 1 $g(u_n) \geqslant 0$. Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

4. **À savoir refaire !!**
La suite (u_n) est croissante et majorée par 2 donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel ℓ.
Déterminons ℓ.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ donc par passage à la limite dans cet encadrement,

$$0 \leqslant \ell \leqslant 2.$$

- De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ (même limite que (u_n)) et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2 + u_n} = \sqrt{2 + \ell}$ car $2 + \ell \in \mathbb{R}_+$. On en déduit que

$$\ell = \sqrt{2 + \ell}$$

donc (tous les nombres sont positifs)

$$\ell^2 = 2 + \ell \text{ donc } \ell^2 - \ell - 2 = 0 \text{ donc (équation déjà résolue en 1) } \ell = -1 \text{ ou } \ell = 2.$$

De ces deux points, on déduit que $\ell = 2$.

Exercice 3 On considère la fonction $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$.

1. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par somme.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$
Or $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Remarque : on aurait pu remarque que f est impaire.

2. Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe bien et que $u_n \leqslant -1$.

Initialisation : $u_0 = -1$ existe et on a bien $u_0 \leqslant -1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n existe et $u_n \leqslant -1$.
Alors $u_n \neq 0$, donc $u_{n+1} = f(u_n)$ existe. De plus,
$$u_n \leqslant -1 \text{ donc } f(u_n) \leqslant f(-1)$$
par croissance de la fonction f sur $]-\infty, -1]$. Ainsi, on a $u_{n+1} \leqslant -2$ et donc $u_{n+1} \leqslant -1$.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \leqslant -1$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$u_{n+1} - u_n = u_n + \frac{1}{u_n} - u_n = \frac{1}{u_n}.$$
Or $u_n < 0$ d'après la question 2, donc $u_{n+1} - u_n < 0$. La suite (u_n) est décroissante.

4. Supposons, par l'absurde, que (u_n) converge. Notons $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{R}$.

   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant -1$ donc par passage à la limite dans cette inégalité,
$$\ell \leqslant -1.$$
   - De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(u_n + \dfrac{1}{u_n}\right) = \ell + \dfrac{1}{\ell}$ car $\ell \in \mathbb{R}^*$. On en déduit que
$$\ell = \ell + \frac{1}{\ell} \text{ donc } 0 = \frac{1}{\ell}$$
ce qui est impossible.

On a obtenu une contradiction. Ceci signifie que l'hypothèse de départ est fausse : (u_n) diverge.

De plus, (u_n) étant décroissante, le théorème de la limite monotone nous dit que :

- soit (u_n) converge ;
- soit $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Exercice 4 On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 12$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{6} = \frac{1}{6} w_n,$$
donc la suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{6}$ et de premier terme $w_0 = 10$. Son terme général est
$$w_n = 10 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n.$$

2. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{2} = \dfrac{w_n}{2} \geqslant 0$ donc (u_n) est croissante.
$v_{n+1} - v_n = -\dfrac{w_n}{3} \leqslant 0$ donc (v_n) est décroissante.

3. Montrons que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. L'une est croissante, l'autre décroissante et
$$v_n - u_n = w_n = 10 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
car $\frac{1}{6} \in]-1, 1[$. Donc (u_n) et (v_n) sont bien adjacentes. D'après le théorème des suites adjacentes, elles convergent vers un même réel.