TD AN2 : Corrigé des ADC

ADC 1

a) $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{2}{3}$, $u_2 = \frac{3}{5}$, $u_3 = \frac{4}{7}$

b) $u_0 = 2$, $u_1 = u_0 + 2^0 = 3$, $u_2 = u_1 + 2^1 = 5$, $u_3 = u_2 + 2^2 = 9$

c) $u_0 = 1$, $u_1 = -2$, $u_2 = 2u_0 - u_1 = 4$, $u_3 = 2u_1 - u_2 = -8$

ADC 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^n} = \frac{n+1-2n}{2^{n+1}} = \frac{1-n}{2^{n+1}}$$

Or $n \geq 1$ donc $1-n \leq 0$ et $2^{n+1} > 0$

Donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

ADC 3

1) $u_n = -3 + 5(n-1)$ car $u_1 = -3$

2) $u_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ car $u_2 = 4$

$$= \frac{2^2}{2^{n-2}} = \frac{1}{2^{n-4}}$$

ADC 4

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. $x = -2x + 7 \iff 3x = 7 \iff x = \frac{7}{3}$
- On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \frac{7}{3}$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{7}{3} \\ &= -2u_n + 7 - \frac{7}{3} \\ &= -2\left(v_n + \frac{7}{3}\right) + \frac{14}{3} \\ &= -2v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison -2 et de 1^{er} terme $v_0 = u_0 - \frac{7}{3} = 2 - \frac{7}{3} = -\frac{1}{3}$.

. On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = -\frac{1}{3} \times (-2)^n$

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n + \frac{7}{3} = \frac{7}{3} - \frac{(-2)^n}{3}}$

ADC 5 (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

(EC) : $x^2 = 6x - 9 \iff x^2 - 6x + 9 = 0$

$\Delta = 0$, (EC) a une racine réelle, $r_0 = 3$

D'après le cours, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda n + \mu)\, 3^n.$$

Or

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = 2 \\ 3\lambda + 3\mu = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = 2 \\ \lambda = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(2 - \frac{5n}{3}\right) 3^n}$

ADC 6 (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

(EC) : $x^2 = x + 1 \iff x^2 - x - 1 = 0$

$\Delta = 5 > 0$. (EC) a deux racines réelles

$$r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

D'après le cours, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Or $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \mu\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \lambda = -\mu \\ \sqrt{5}\mu = 1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \mu = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$

ADC7 (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

(EC) : $x^2 = x - 1 \iff x^2 - x + 1 = 0$

$\Delta = -3 < 0$.

(EC) admet deux racines complexes conjuguées :

$z_1 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\pi/3}$ et $z_2 = e^{i\pi/3} = re^{i\theta}$

avec ici $r = 1$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$.

D'après le cours, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(\lambda \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \mu \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right) 1^n$

or $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \frac{1}{2}\lambda + \frac{\sqrt{3}}{2}\mu = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = -1 \end{cases}$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}$

ADC 8

1) $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n^2+1} = \dfrac{n^2(1+1/n^2)}{2n^2\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)} = \dfrac{1+\frac{1}{n^2}}{2\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$

2) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$

$$= \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

3) $u_n = \dfrac{2^n - 3^n}{n^5 - 3^n} = \dfrac{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right)}{3^n\left(\frac{n^5}{3^n} - 1\right)} = \dfrac{(2/3)^n - 1}{n^5/3^n - 1}$

Or $\left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $-1 < \frac{2}{3} < 1$

et $\dfrac{n^5}{3^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissance comparée.

Donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

4) $u_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)$

Posons $h = \frac{2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) = \frac{2}{h}\ln(1+h) = 2\times\dfrac{\ln(1+h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 2\times 1$

par taux d'accroissement usuel.

Or $\lim\limits_{x\to 2} \exp(x) = e^2$. Par composée, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^2$.

ADC 9

1) $|u_n| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2) $u_n = \dfrac{n^2+n-1}{n^2-n\cos(n)} = \dfrac{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{1-\frac{\cos(n)}{n}}$

Or $\quad -1 \leq \cos(n) \leq 1$

donc $\quad -\frac{1}{n} \leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$, d'après le théorème d'encadrement, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n)}{n} = 0$.

Par suite, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

3) $u_n = \ln(n) + \sin(n) \geqslant \ln(n) - 1$

Or $\lim_{n\to+\infty} \left(\ln(n) - 1\right) = +\infty$.

Par minoration, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.