TD2 – AL1

Nombres complexes

Applications directes du cours

ADC1 Calculer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

$$z_1 = (3+2i)^2(2-i) \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{(3+2i)(1+i)}{1-i}.$$

ADC2 Déterminer le module de $z_3 = \dfrac{1+i}{1-3i}$ et de $z_4 = (2+3i)^4$.

ADC3 Linéariser, à l'aide des formules d'Euler : $\cos(2x)\sin^3(x)$; $\sin^4(x)$.

ADC4 Déterminer une écriture exponentielle des nombres complexes suivants :

1. $z_5 = 57$
2. $z_6 = -4i$
3. $z_7 = -1 + i\sqrt{3}$
4. $z_8 = 2 - 2i$
5. $z_9 = \dfrac{z_7}{z_8}$
6. $z_{10} = z_7 z_8$

ADC5 Écrire sous forme algébrique $z_{11} = \left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^{10}$.

ADC6 Résoudre, sous forme exponentielle, l'équation $z^2 = -1 + i\sqrt{3}$.

Exercices

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $|z| + \bar{z} = 6 - 2i$.

Exercice 2 On souhaite résoudre l'équation (E) : $z^3 - 2iz^2 - (3-4i)z + 8 + 6i = 0$

1. Montrer que cette équation admet une unique solution imaginaire pure, que l'on précisera.
2. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^3 - 2iz^2 - (3-4i)z + 8 + 6i = (z-2i)(z^2 - 3 + 4i)$.
3. (a) Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Justifier que

$$z^2 = 3 - 4i \iff \begin{cases} a^2 + b^2 = 5 \\ a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = -4 \end{cases}$$

   (b) Résoudre le système $\begin{cases} A + B = 5 \\ A - B = 3 \end{cases}$

   (c) Déterminer alors les solutions de l'équation $z^2 = 3 - 4i$ sous forme algébrique.
4. Conclure.

Exercice 3 Déterminer une écriture trigonométrique/exponentielle des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = \sin(\theta) + i\cos(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$.
2. $z_2 = 1 + \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$

Indication : Pour z_2, on pourra commencer par factoriser par $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}}$.

Exercice 4 On considère le nombres complexes : $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_4 = -1 - i$.

1. Déterminer la forme algébrique de $\dfrac{z_3}{z_4}$.
2. Déterminer la forme trigonométrique de $\dfrac{z_3}{z_4}$.
3. En déduire $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 5 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(i-z)^4 = z^4$

Pour aller plus loin

Exercice 6

1. Soient z_1, z_2 des nombres complexes tels que $|z_1| = |z_2| = 1$. Montrer que $\dfrac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2} \in \mathbb{R}_+$.
2. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z de module 1 vérifiant $\left|\dfrac{z}{\bar{z}} + \dfrac{\bar{z}}{z}\right| = 1$.
3. Résoudre l'équation $z^6 + 6z^3 + 12 = 0$.
4. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $z + \dfrac{1}{z} = \sqrt{3}$. Calculer $z^n + \dfrac{1}{z^n}$.

Exercice 7 Soit $\omega = \mathrm{e}^{2i\pi/5}$.

1. Calculer $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$.
2. Soit $z = \omega + \omega^{-1}$. Trouver une équation du second degré vérifiée par z.
3. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 8 **Trigonométrie - hors complexes**

1. Résoudre l'équation $\sin^6(x) + \cos^6(x) = \frac{1}{4}$.
2. Résoudre l'équation $\tan(x)\tan(5x) = 1$.