TD2 – AL1

CORRIGÉ DES "POUR ALLER PLUS LOIN"

Exercice 6

1. Soient z_1, z_2 des nombres complexes tels que $|z_1| = |z_2| = 1$. Montrer que $\dfrac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2} \in \mathbb{R}_+$.
   En utilisant $z_1\overline{z_1} = |z_1|^2 = 1$ et $z_2\overline{z_2} = |z_2|^2 = 1$
   $$Z = \frac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2} = \frac{(z_1+z_2)^2\overline{z_1z_2}}{|z_1|^2|z_2|^2} = (z_1+z_2)^2\overline{z_1z_2} = z_1\overline{z_2} + 2 + z_2\overline{z_1} = 2 + u + \overline{u} = 2 + 2\mathrm{Re}(u)$$
   avec $u = z_1\overline{z_2}$.
   Ceci prouve déjà que Z est réel.
   De plus, on peut écrire $z_1 = \mathrm{e}^{i\theta_1}$ et $z_2 = \mathrm{e}^{i\theta_2}$ avec $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$.
   Alors $u = \mathrm{e}^{i(\theta_1-\theta_2)}$ donc
   $$Z = 2 + 2\cos(\theta_1 - \theta_2) \geqslant 0$$
   donc $Z \in \mathbb{R}_+$.

2. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z de module 1 vérifiant $\left|\dfrac{z}{\bar{z}} + \dfrac{\bar{z}}{z}\right| = 1$.

   Soit $z = \mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{U}$. Alors, d'après le cours, $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$, donc $\left|\dfrac{z}{\bar{z}} + \dfrac{\bar{z}}{z}\right| = \left|z^2 + \bar{z}^2\right| = \left|2\mathrm{Re}(z^2)\right| = 2\left|\cos(2\theta)\right|$.
   On en déduit que :
   $$\begin{aligned}\left|\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}\right| = 1 &\iff |\cos(2\theta)| = \frac{1}{2} \iff \cos(2\theta) = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \cos(2\theta) = -\frac{1}{2}\\ &\iff 2\theta = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad \text{ou} \quad 2\theta = -\frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\\ &\iff \theta = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \theta = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}\\ &\iff z \in \left\{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}, \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}, \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}, \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{6}}, \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}, \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}, \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}}, \mathrm{e}^{-i\frac{5\pi}{6}}\right\}\end{aligned}$$

3. Résoudre l'équation $z^6 + 6z^3 + 12 = 0$.

   Soit $z \in \mathbb{C}$ et $Z = z^3$.
   $$\begin{aligned} z^6 + 6z^3 + 12 = 0 &\iff Z^2 + 6Z + 12 = 0 \iff Z = -3 - i\sqrt{3} \text{ ou } Z = -3 + i\sqrt{3}\\ &\iff Z = 2\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-i\frac{5\pi}{6}} \text{ ou } Z = 2\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{6}}\\ &\iff z^3 = 2\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-i\frac{5\pi}{6}} \text{ ou } z^3 = 2\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{6}}\end{aligned}$$
   Résolvons donc les deux nouvelles équations. Puisque $z = 0$ n'est pas solution, on peut écrire $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
   $$z^3 = 2\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-i\frac{5\pi}{6}} \iff \begin{cases} r^3 = 2\sqrt{3} \\ 3\theta = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\end{cases} \iff \begin{cases} r = 2^{1/3}3^{1/6} \\ \theta = -\frac{5\pi}{18} + 2k\frac{\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z}\end{cases} \iff z = \sqrt[6]{12}\,\mathrm{e}^{i\frac{(-5+12k)\pi}{18}}$$
   Il y a ici 3 solutions : $\sqrt[6]{12}\,\mathrm{e}^{i\frac{-5\pi}{18}}$, $\sqrt[6]{12}\,\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{18}}$ et $\sqrt[6]{12}\,\mathrm{e}^{i\frac{29\pi}{18}}$.
   De même, la deuxième équation a trois solutions : $\sqrt[6]{12}\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{18}}$, $\sqrt[6]{12}\,\mathrm{e}^{i\frac{17\pi}{18}}$ et $\sqrt[6]{12}\,\mathrm{e}^{i\frac{19\pi}{18}}$
   Il y a donc en tout 6 solutions, listées ci-dessus.

4. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $z + \dfrac{1}{z} = \sqrt{3}$. Calculer $z^n + \dfrac{1}{z^n}$.

$$z+\frac{1}{z} = \sqrt{3} \Longleftrightarrow z^2-\sqrt{3}z+1 = 0 \Longleftrightarrow z = \frac{\sqrt{3}-i}{2} \text{ ou } z = \frac{\sqrt{3}+i}{2} \Longleftrightarrow z = \mathrm{e}^{-i\pi/6} \text{ ou } z = \mathrm{e}^{i\pi/6}$$

On a alors (dans les deux cas) : $z^n + \dfrac{1}{z^n} = \mathrm{e}^{in\pi/6} + \mathrm{e}^{-in\pi/6} = 2\cos\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)$.

Exercice 7

Soit $\omega = \mathrm{e}^{2i\pi/5}$.

1. $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = \dfrac{1-\omega^5}{1-\omega} = 0$ (somme des termes d'une suite géométrique de raison $\omega \neq 1$).
2. Soit $z = \omega + \omega^{-1}$. La relation suivante donne, en diviant par ω^2 :
$$\omega^{-2} + \omega^{-1} + 1 + \omega + \omega^2 = 0$$
Or, $z^2 = \omega^2 + 2 + \omega^{-2}$, donc on a : $z^2 + z - 1 = 0$.
3. On résout cette équation : $z = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ou $z = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
Or, $z = \omega + \overline{\omega} = 2\mathrm{Re}(\omega) = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) > 0$. Donc $z = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.
On sait que $\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) > 0$ donc $\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{1-\cos^2\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)} = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$

Exercice 8

1. Résoudre l'équation $\sin^6(x) + \cos^6(x) = \frac{1}{4}$.

$\sin^6(x) + \cos^6(x) = \left(1-\cos^2(x)\right)^3 + \cos^6(x) = 1 - 3\cos^2(x) + 3\cos^4(x)$.
On pose alors $X = \cos^2(x) \in [-1, 1]$.

$$\begin{aligned}
\sin^6(x) + \cos^6(x) = \frac{1}{4} &\Longleftrightarrow \frac{3}{4} - 3\cos^2(x) + 3\cos^4(x) = 0\\
&\Longleftrightarrow \frac{3}{4} - 3X + 3X^2 = 0\\
&\Longleftrightarrow 1 - 4X + 4X^2 = 0\\
&\Longleftrightarrow (2X-1)^2 = 0\\
&\Longleftrightarrow X = \frac{1}{2}\\
&\Longleftrightarrow \cos^2(x) = \frac{1}{2}\\
&\Longleftrightarrow \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } \cos(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\\
&\Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

2. Résoudre l'équation $\tan(x)\tan(5x) = 1$.

Valeurs interdites : $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; $x = \dfrac{\pi}{10} + \ell\dfrac{\pi}{5}$, $\ell \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
\tan(x)\tan(5x) = 1 &\iff \frac{\sin(x)\sin(5x)}{\cos(x)\cos(5x)} = 1 \\
&\iff \sin(x)\sin(5x) - \cos(x)\cos(5x) = 0 \\
&\iff \cos(x + 5x) = 0 \\
&\iff 6x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z} \\
&\iff x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{6},\ \ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Cela ne rencontre pas les valeurs interdites.