TD1 – AN1

Étude de fonctions – Inégalités

Applications directes du cours

ADC1 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f\colon x \mapsto x^2+7x^4$
2. $f\colon x \mapsto \dfrac{2x+3}{x+7}$
3. $f\colon x \mapsto x\ln(x)$
4. $f\colon x \mapsto \sqrt{\ln(x)}$

ADC2

1. Vérifier que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$. En déduire, à l'aide des formules de trigonométrie, la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et la valeur de $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.
2. Exprimer $\cos^2(a)$ en fonction de $\cos(2a)$. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

ADC3 Déterminer l'ensemble de définiton de $f\colon x \mapsto \cos(5x) + \ln(1-x^2)$ et étudier la parité de f.

ADC4 Étudier les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x^2 - \mathrm{e}^x)$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} (3x^2 - \mathrm{e}^x)$.
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln(x)$.
4. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{5x+1}{4-x^2}$.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

ADC5 Calculer la dérivée des fonctions suivantes (on ne cherchera pas l'ensemble de dérivabilité) :

1. $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x)}$.
2. $f\colon x \mapsto (2x+5)^2$.
3. $f\colon x \mapsto x^3\cos(5x)$.
4. $f\colon x \mapsto \exp\left(\sqrt{x}\right)$.
5. $f\colon x \mapsto \tan(x^2)$.

ADC6 Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue réelle x :

1. $\dfrac{x-1}{x+1} < \dfrac{2}{x-1}$
2. $x^3 + 1 \leqslant 0$
3. $\sqrt{x-1} \leqslant \sqrt{x^2+2}$

ADC7 Montrer l'inégalité suivante : pour tout réel $x > 0$, $\quad \ln(x) \leqslant x - 1$.

ADC8 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left\lfloor x + \dfrac{3}{4} \right\rfloor = 2$.

ADC9 Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue réelle x :

1. $|x+1| < 4$
2. $|2x+3| > 6$

Exercices

Exercice 1 Démontrer : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad ab \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

Exercice 2 On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Montrer que la droite $\Delta : y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$. On précisera la position relative de $\mathcal{C}_f$ et Δ.
4. Étudier les variations de f.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution sur $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \tan(x)\sin(x)$.

1. Étudier la parité de f.
2. Montrer que f est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculer sa dérivée.
3. Dresser le tableau de variation complet de f sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
4. La fonction f admet-elle des extrema ? Préciser.
5. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{4}$.

Pour aller plus loin

Exercice 4 Résoudre $|2x+1| \geqslant x - 3$

Exercice 5 On pose $f : x \mapsto \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+1} - x > 0$. *On pourra faire deux cas, suivant le signe de x.*
2. Justifier que f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est impaire.
4. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
5. Dresser le tableau de variation de f.