TD – PB2

Variables aléatoires finies

Applications directes du cours

ADC1 Une urne contient 5 boules rouges, 5 boules blanches et 6 boules bleues. On tire 2 boules successivement, sans remise. On désigne par X_1 la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer la loi de $Y = (X_1 - 1)^2$.

ADC2 Soit X_2 une variable aléatoire prenant les valeurs 3, 4, 5 et 6. Déterminer la loi de probabilité de X_2 sachant que :

$$P([X_2 = 3]) = P([X_2 = 4]), \quad P([X < 5]) = \frac{1}{3}, \quad P([X_2 > 5]) = \frac{1}{3}.$$

ADC3 On considère un jeu de 52 cartes traditionnel et on pioche une carte au hasard dans le paquet. On note alors X_3 la valeur de la carte piochée avec la valeur 1 pour un as, 2 pour un deux, ... , 10 pour un dix, 11 pour un valet, 12 pour une dame et 13 pour un roi.
Déterminer la loi de X_3.

ADC4 On considère un jeu de 32 cartes traditionnel et on pioche simultanément deux cartes dans le paquet. Si les deux cartes tirées sont de même valeur, on dit qu'il y a « bataille » et on pose $B = 1$, dans le cas contraire, on pose $B = 0$.
Donner la loi de B.

ADC5 En reprenant les variables aléatoires des ADC précédents :

1. Calculer l'espérance de X_2 et de $Y = 6X_2 - 1$.
2. Calculer la variance de X_2 et de $Y = 6X_2 - 1$.
3. Donner l'espérance et la variable de X_3 et de B.

ADC6 On effectue 360 lancers d'un même dé cubique parfaitement équilibré. En moyenne, combien obtient-on de 5 ? Justifier avec une espérance.

ADC7 Soit $X \hookrightarrow B(n, p)$. Calculer l'espérance de $Y = 2^X$.

Exercices

Exercice 1 Une urne contient $n \geqslant 2$ boules numérotées de 1 à n. On effectue deux tirages successifs d'une boule sans remise. On note Z la variable aléatoire égale au plus petit des deux numéros.

1. Déterminer la loi de Z.
2. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k \in Z(\Omega)} P(Z = k) = 1$.

Exercice 2 On dispose d'une urne qui contient des boules blanches et noires, avec une proportion de boules blanches égale à $\frac{1}{3}$. Un joueur tire une à une, successivement et avec remise, des boules de l'urne. Le jeu s'arrête dans deux cas :

- soit lorsqu'il tire une boule blanche ;
- soit lorsqu'il a réalisé $n \in \mathbb{N}^*$ tirages.

On introduit la variable X_n égale au nombre de tirages effectués par le joueur.

1. Déterminer la loi de X_2.
2. Déterminer la loi de X_3.
3. Déterminer la loi de X_n en général.

Exercice 3 Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Les résultats de X sont censés être affichés par un compteur mais celui-ci est détraqué : lorsque X prend une valeur non nulle, le compteur affiche la bonne valeur de X, mais lorsque X prend la valeur 0, le compteur affiche un entier au hasard entre 1 et n. On note Y la variable aléatoire égale au nombre affiché par le compteur.

1. Donner $Y(\Omega)$.
2. Soient $i \in [\![0, n]\!]$ et $k \in [\![1, n]\!]$. Déterminer $P_{[X=i]}(Y = k)$.
3. En déduire la loi de Y.
4. Calculer $E(Y)$.

Exercice 4 Une demi-droite est divisée en segments de longueur 1, numérotés 0,1,2,3,... de gauche à droite.
Une puce se déplace vers la droite en faisant des sauts de longueur 1 ou 2, au hasard. On supposera les sauts indépendants.
Au départ, elle est sur la case 0.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale au numéro de la case occupée par la puce après n sauts.

1. Déterminer la loi de probabilité de X_1, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de probabilité de X_2, son espérance et sa variance.
3. (a) Soit Y_n la variable aléatoire égale au nombre de fois où la puce a effectué un saut de deux cases au cours des n premiers sauts. Reconnaître la loi de probabilité de Y_n. Calculer son espérance et sa variance.
   (b) Exprimer X_n en fonction de Y_n. En déduire la loi de probabilité de X_n, son espérance et sa variance.