TD – PB1

Probabiilités sur un univers fini

Applications directes du cours

ADC1
1. Combien existe-t-il de nombres à six chiffres ne contenant pas le chiffre 0 ?
2. Combien existe-t-il de nombres à six chiffres dont les chiffres sont non nuls et deux à deux distincts ?
3. Combien existe-t-il de nombres à six chiffres ?

ADC2 On dispose d'un jeu de 32 cartes et on appelle main tout ensemble de 5 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains possibles ?
2. Combien y a-t-il de mains donnant exactement trois rois ?
3. Combien y a-t-il de mains où toutes les cartes sont des coeurs ?

ADC3 Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire deux boules. Déterminer la probabilité d'obtenir deux boules portant des numéros de même parité dans les cas suivants :

1. On tire les deux boules simultanément.
2. On tire une boule et on la remet avant de tirer la deuxième boule.

ADC4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On effectue n tirages successifs et sans remise dans cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir n boules noires ?

ADC5 On dispose de trois urnes numérotées de 1 à 3. Pour tout $k \in [\![1, 3]\!]$, l'urne numéro k contient k boules blanches et $(3-k)$ boules noires.

1. On choisit une urne au hasard, on extrait une boule. Quelle est la probabilité qu'elle soit blanche ?
2. On choisit une urne au hasard, on extrait une boule et on constate qu'elle est blanche. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne 1 ?

ADC6 On lance deux fois un dé équilibré et on considère les événements suivants :

- A_1 :« la somme des deux lancers est égale à 6 ».
- A_2 :« la somme des deux lancers est égale à 7 ».
- B :« le premier lancer donne 4 ».

Les événements A_1 et B sont-ils indépendants ? Les événements A_2 et B sont-ils indépendants ?

ADC7 Si A et B sont deux événements incompatibles à quelle condition sont-ils indépendants ? L'événement A peut-il être indépendant de lui-même ?

Exercices

Exercice 1 Un anagramme du mot THÉORÈME est un mot (n'ayant pas forcément de sens français) contenant les même lettres et en même nombre. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot THÉORÈME ...

1. ... en distinguant É, È et E ?
2. ... en omettant les accents ?
3. ... en omettant les accents, et en imposant que la dernière lettre soit un E ?

Exercice 2 À l'entrée d'un immeuble, on dispose d'un clavier de 12 touches : trois lettres A, B et C, et les neuf chiffres 1,2,...,9. Le code d'ouverture de la porte est composé d'une lettre suivie d'un nombre de quatre chiffres.

1. Combien y a-t-il de codes différents ?
2. Le code a été changé et choisi au hasard.
   (a) Quelle est la probabilité qu'il comporte au moins une fois le chiffre 7 ?
   (b) Quelle est la probabilité que le code commence par A et tous les chiffres soient pairs ?
   (c) Quelle est la probabilité que les quatre chiffres soient différents ?
   (d) Quelle est la probabilité que les quatre chiffres soient dans l'ordre strictement croissant ?

Exercice 3 Un jeu de cartes comporte 32 cartes. On choisit au hasard une main de 8 cartes.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un cœur ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir deux carrés (ensemble de quatre cartes de même valeur) ?

Exercice 4 Une urne U_1 contient 3 boules blanches et 4 noires, et une urne U_2 contient 4 boules blanches et 3 noires. On effectue n tirages (avec $n \in \mathbb{N}^*$) dans les conditions suivantes :

- tous les tirages se font avec remise ;
- on effectue un premier tirage dans U_1 ;
- si un tirage donne une boule blanche le tirage suivant se fait dans U_1, sinon il se fait dans U_2.

On note p_n la probabilité d'obtenir une boule blanche au n-ième tirage.

1. Déterminer p_{n+1} en fonction de p_n.
2. En déduire la valeur de p_n pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 5 *Exceptionnellement, on pourra utiliser la calculatrice.*
Une maladie touche 20% de la population d'un pays. Lors d'un dépistage de la maladie, on utilise un test biologique qui a les caractéristiques suivantes :

- lorsque la personne est malade, la probabilité d'avoir un test positif est 0,70.
- lorsque la personne n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est 0,95.

On choisit une personne au hasard dans cette population. On appelle valeur prédictive positive du test (VPP), la probabilité qu'une personne soit malade sachant que le test est positif. On estime que ce test est efficace pour une population donnée lorsque cette probabilité est supérieure à 0,95.

1. Calculer la valeur prédictive positive de ce test. Ce test est-il efficace sur la population étudiée ?
2. Mêmes questions en supposant cette fois que 60% des personnes sont touchées.

Exercice 6 Un système complexe est formé de trois machines M_1, M_2 et M_3 qui peuvent indépendamment tomber en panne dont les probabilités de panne sont respectivement : p_1, p_2 et p_3. Le système tombe en panne dès que l'une au moins des trois machines est en panne.

1. Déterminer la probabilité de panne du système.
2. Le système étant tombé en panne, quelle est la probabilité que la machine M_1 soit tombée en panne ?

Exercice 7 On lance trois pièces de monnaie amenant pile avec la probabilité $p \in]0,1[$. Les trois lancers sont indépendants.
Soient A l'événement « il est apparu au moins un pile et au moins un face » et B l'événement « il est apparu au plus un pile ». Les événements A et B sont-ils indépendants si $p = \dfrac{1}{4}$? si $p = \dfrac{1}{2}$?

Pour aller plus loin

Exercice 8 Soient b, r et n trois entiers naturels non nuls.
Une urne contient b boules blanches et r boules rouges.
On tire n boules :

- ▷ en remettant la boule après tirage si elle est rouge,
- ▷ en ne la remettant pas si elle est blanche.

Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une boule blanche en n tirages ?

Exercice 9 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n]\!]$. Une urne contient n boules distinctes numérotées de 1 à n. On extrait p boules *simultanément* de l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Soit k un entier vérifiant $p \leqslant k \leqslant n$.
   (a) Déterminer la probabilité que tous les numéros tirés soient inférieurs ou égaux à k.
   (b) Déterminer la probabilité que le plus grand numéro tiré soit k.
3. En utilisant les dénombrements des questions précédentes, montrer que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$.

Exercice 10 On considère les ensembles $E = \{-1, 0, 1\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

1. Combien existe-t-il d'applications de E dans F ?
2. Combien existe-t-il d'applications f de E dans F telles que $f(0) = 1$?
3. Combien existe-t-il d'applications f de E dans F telles que $f(0) \neq f(1)$?
4. Combien existe-t-il d'applications injectives de E dans F ?
5. Combien existe-t-il d'applications surjectives de E dans F ?
6. Combien existe-t-il d'applications bijectives de E dans E ?