TD PB1 : Corrigé des exercices

Exercice 1

1) Un anagramme est ici une 8-liste sans répétition de $\{T, H, É, O, R, È, M, E\}$.

Il y en a donc $8!$

2) Cette fois, il y a trois lettres identiques. Ce n'est pas un cas de cours. Détaillons donc.

Pour obtenir un anagramme, il faut placer les 8 lettres :

___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

→ On commence par les trois E. Il s'agit de choisir 3 emplacements parmi les 8 : il y a $\binom{8}{3}$ possibilités.

Un exemple :

___ E E ___ ___ ___ E ___

→ puis on place les 5 autres lettres. Il faut choisir l'ordre donc il s'agit de choisir une 5-liste sans répétition de $\{T, H, R, O, M\}$. Il y a $5!$ possibilités.

Au total, il y a $\binom{8}{3} \times 5!$ anagrammes.

3) Ici, la dernière lettre est un E. On reprend ce qui précède mais il y a simplement à placer 7 lettres dans les 7 premiers emplacements.

→ les deux E : Il y a $\binom{7}{2}$ possibilités

→ puis les autres lettres : $5!$ possibilités.

Total : $\binom{7}{2} \times 5!$ possibilités.

Exercice 2

1) Pour choisir un code :

→ on choisit une lettre : 3 possibilités

→ puis on choisit une 4-liste de $[\![1,9]\!]$: 9^4 possibilités.

Il y a donc 3×9^4 codes.

2) Modélisation : Soit Ω l'ensemble des codes. $\text{Card}(\Omega) = 3 \times 9^4$.

Il est muni de la probabilité uniforme.

2a) D : " le code comporte au moins un 7".

$\overline{D}$: " le code ne comporte aucun 7".

Un code de $\overline{D}$ est :

→ une lettre : 3 possibilités

→ puis une 4-liste de $\{1,2,3,4,5,6,8,9\}$: 8^4 possibilités

donc $\text{Card}(\overline{D}) = 3 \times 8^4$.

On a $$P(\overline{D}) = \frac{\text{Card}(\overline{D})}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{3 \times 8^4}{3 \times 9^4} = \left(\frac{8}{9}\right)^4.$$

Ainsi $P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^4$.

2b) E : " tous les chiffres sont pairs et il commence par A"

Un code de E commence par A. Il reste à choisir une 4-liste de $\{2,4,6,8\}$. Donc $\text{Card}(E) = 4^4$.

Ainsi $$P(E) = \frac{\text{Card}(E)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{4^4}{3 \times 9^4} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{9}\right)^4.$$

2c) F : " les chiffres sont deux à deux distincts".

Un code de F c'est :

→ une lettre : 3 possibilités

→ puis une 4-liste sans répétition de $[\![1,9]\!]$: $9 \times 8 \times 7 \times 6$ possibilités

$\text{Card}(F) = 3 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3 \times \frac{9!}{5!}$ puis $$P(F) = \frac{\cancel{3} \times \cancel{9} \times 8 \times 7 \times 6}{\cancel{3} \times 9^{\cancel{4}\,3}} = \frac{8 \times 7 \times 6}{9^3}$$

$$= \frac{8!}{9^3 \times 5!}$$

2a) G : " les chiffres sont dans l'ordre croissant ".

Pour obtenir un code de G :

→ on choisit une lettre : 3 possibilités

→ puis on choisit 4 chiffres deux à deux distincts sans ordonner au début, c'est-à-dire une combinaison de 4 chiffres : il y a $\binom{9}{4}$ possibilités

→ puis, on ordonne dans l'ordre croissant : il y a une seule façon de le faire.

$Card(G) = 3 \times \binom{9}{4} \times 1$. donc $P(G) = \dfrac{3 \times \binom{9}{4}}{3 \times 9^4} = \dfrac{\binom{9}{4}}{9^4}$

Exercice 3

Modélisation : L'univers Ω est l'ensemble des mains de 8 cartes parmi les 32 du jeu : $Card(\Omega) = \binom{32}{8}$.

De plus, Ω est muni de la probabilité uniforme.

1) A : "obtenir au moins un coeur".

$\bar{A}$: " ne pas obtenir de coeur". Il y a 8 coeurs donc une main de $\bar{A}$ est un ensemble de 8 cartes parmi les $32 - 8 = 24$ cartes restantes : $Card(\bar{A}) = \binom{24}{8}$.

$$P(\bar{A}) = \frac{Card(\bar{A})}{Card(\Omega)} = \frac{\binom{24}{8}}{\binom{32}{8}}$$

Donc $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \dfrac{\binom{24}{8}}{\binom{32}{8}}$.

2) B : " obtenir 2 carrés ".

Il y a 8 valeurs possibles donc 8 carrés possibles.

Une main de B est un ensemble non ordonné de 2 carrés.

$Card(B) = \binom{8}{2}$.

Donc $P(B) = \dfrac{\binom{8}{2}}{\binom{32}{8}}$.

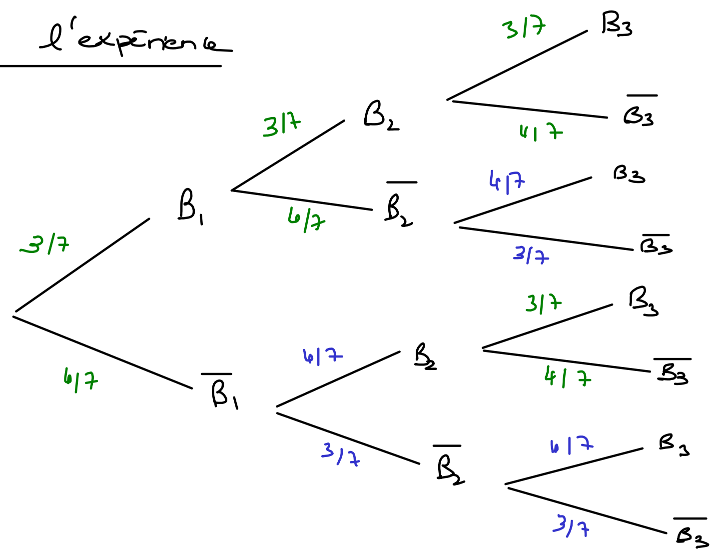
Exercice 4

Notons B_n : " obtenir une boule blanche au n-ième tirage".

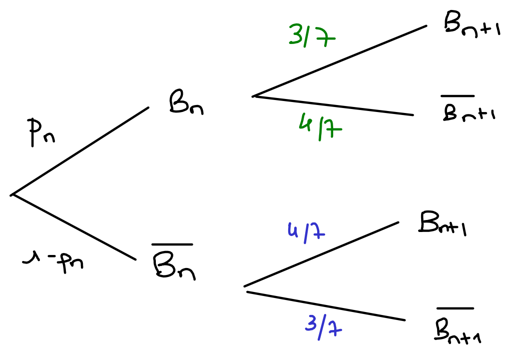
Début de l'expérience

vert : tirages dans U_1

bleu : dans U_2



Tirages n et n+1



$(B_n, \overline{B_n})$ est un système complet d'évènements.

D'après la formule des probabilités totales

$$P(B_{n+1}) = P(B_n)\, P_{B_n}(B_{n+1}) + P(\overline{B_n})\, P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})$$

$$p_{n+1} = p_n \times \frac{3}{7} + (1-p_n) \times \frac{4}{7}$$

$$p_{n+1} = \frac{4}{7} - \frac{1}{7} p_n .$$

2) $(p_n)_{n\geq 1}$ est arithmético-géométrique.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\quad x = \frac{4}{7} - \frac{1}{7}x \iff 7x = 4 - x$

$\iff 8x = 4$

$\iff x = \frac{1}{2}$

Soit $\quad q_n = p_n - \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{4}{7} - \frac{1}{7}p_n - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{14} - \frac{1}{7}\left(q_n + \frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{7}q_n \end{aligned}$$

Donc $(q_n)_{n\geq 1}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{7}$ et de premier terme $q_1 = p_1 - \frac{1}{2}$

Or $p_1 = P(B_1) = \frac{3}{7}$. Donc $q_1 = \frac{-1}{14}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad q_n = -\frac{1}{14}\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1}$$

Donc $\quad \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{14}\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1}}$