TD PB1 - Corrigé des ADC

ADC 1

1) Un nombre à 6 chiffres ne contenant pas le chiffre 0 est une 6-liste de $[\![1,9]\!]$. Il y a donc 9^6 possibilités.

2) Un nombre à 6 chiffres non nuls et deux à deux distincts est une 6-liste sans répétition de $[\![1,9]\!]$. Il y a

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = \frac{9!}{3!} \quad \text{possibilités.}$$

3) Méthode 1 : Un nombre à 6 chiffres est un élément de $[\![100\,000, 999\,999]\!]$. Il y a

$$999\,999 - 100\,000 + 1 = 900\,000 \quad \text{tels nombres.}$$

Méthode 2 (version longue) :

Pour choisir un nombre à 6 chiffres :

→ on choisit le 1er chiffre (celui le plus à gauche), qui doit être non nul : il y a 9 possibilités

→ puis, on choisit les autres chiffres, soit une 5-liste de $[\![0,9]\!]$: il y a 10^5 possibilités

Au total, il y a 9×10^5 possibilités

ADC 2

1) Une main est une combinaison de 5 cartes parmi les 32 du jeu. Il y en a $\binom{32}{5}$.

2) Pour obtenir une main ayant exactement 3 rois :

→ on choisit 3 rois parmi les 4 : il y a $\binom{4}{3} = 4$ possibilités

→ puis on choisit 2 autres cartes parmi les $32 - 4 = 28$ restantes. Il y a $\binom{28}{2}$ possibilités.

Au total, il y a $4 \times \binom{28}{2}$ telles mains.

3) Il y a $\frac{32}{4} = 8$ coeurs.

Une main de coeur est un ensemble de 5 cartes parmi les 8 coeurs. Il y en a $\binom{8}{5}$.

ADC 3

1) Tirages simultanés

Modélisation : l'univers Ω est l'ensemble des combinaisons de deux numéros de $[\![1,9]\!]$. $Card(\Omega) = \binom{9}{2} = \frac{9\times 8}{2} = 36$.

Les tirages sont équiprobables donc on considère la probabilité uniforme P sur Ω.

Soient A : "obtenir des numéros de même parité"

B : "obtenir 2 numéros pairs"

C : "obtenir 2 numéros impairs".

$A = B \cup C$ avec B et C incompatibles donc $P(A) = P(B) + P(C)$.

* $P(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)}$.

Un tirage de B est une combinaison de 2 numéros de $\{2, 4, 6, 8\}$, donc $Card(B) = \binom{4}{2} = \frac{4\times 3}{2} = 6$.

$$P(B) = \frac{6}{36}$$

* $P(C) = \frac{Card(C)}{Card(\Omega)}$ et C est l'ensemble des combinaisons de 2 numéros de $\{1, 3, 5, 7, 9\}$: $Card(C) = \binom{5}{2} = \frac{5\times 4}{2} = 10$.

$$P(C) = \frac{10}{36}$$

* On a donc $P(A) = \frac{6}{36} + \frac{10}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

2) Tirages successifs avec remise

Modélisation : l'univers Ω est l'ensemble des 2-listes de $[\![1,9]\!]$

$$\text{Card}(\Omega) = 9^2 = 81.$$

Les tirages sont équiprobables donc on considère la probabilité uniforme P sur Ω.

Soient A : " obtenir des numéros de même parité "

B : " obtenir 2 numéros pairs "

C : " obtenir 2 numéros impairs.

$A = B \cup C$ avec B et C incompatibles donc $P(A) = P(B) + P(C)$.

* $P(B) = \dfrac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)}$.

Un tirage de B est une 2-liste de $\{2,4,6,8\}$.

Donc $\text{Card}(B) = 4^2 = 16$

$$P(B) = \frac{16}{81}$$

* $P(C) = \dfrac{\text{Card}(C)}{\text{Card}(\Omega)}$ et l'ensemble des 2-listes de $\{1,3,5,7,9\}$

$\text{Card}(C) = 5^2 = 25$ donc $P(C) = \dfrac{25}{81}$.

* On a donc $P(A) = \dfrac{16}{81} + \dfrac{25}{81} = \dfrac{41}{81}$

AOC4

* $n \in \mathbb{N}^*$. Un tirage est une n-liste de $\{B,N\}$.

Par exemple : $(B,B,N,\dots,B,N)$

⚠ Si on regarde juste les couleurs, il n'y a pas probabilité uniforme, il faut faire autrement.

Méthode 1 : Numérotons les boules blanches 1 à n

les boules noires $n+1$ à $2n$.

Un tirage est alors une <u>n-liste sans répétition de $[\![1, 2n]\!]$</u> et, avec ce point de vue, les tirages sont équiprobables. L'univers Ω est alors muni de la <u>probabilité uniforme</u>. $\text{Card}(\Omega) = \dfrac{(2n)!}{(2n-n)!} = \dfrac{(2n)!}{n!}$

Soit A : "obtenir n-boules noires". Un tirage de A est une n-liste sans répétition de $[\![n+1, 2n]\!]$ donc

$$\text{Card}(A) = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

$$\text{Donc} \quad P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

<u>Méthode 2</u> : On change de point de vue et on considère que les tirages sont <u>simultanés</u> car c'est sans remise et ici l'ordre des tirages n'a pas d'importance pour la question posée.

Toujours avec la même numérotation, l'univers Ω' est l'ensemble des combinaisons de n boules parmi les 2n boules.

$\text{Card}(\Omega') = \binom{2n}{n}$ et il y a toujours probabilité uniforme

Et $\text{Card}(A) = \binom{n}{n} = 1$, donc $P(A) = \dfrac{1}{\binom{2n}{n}} = \dfrac{1}{\frac{(2n)!}{n!\,(2n-n)!}} = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

<u>Méthode 3</u> : <u>Avec les probabilités conditionnelles</u>

Notons N_k : "obtenir une boule noire au k-ième tirage".

$$A = N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_n$$

D'après la formule des probabilités composées :

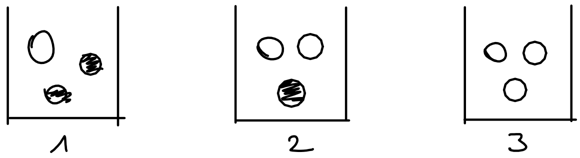
$$P(A) = P(N_1)\, P_{N_1}(N_2) \dots P_{N_1 \cap \dots \cap N_{n-1}}(N_n)$$

$$= \frac{n}{2n} \times \frac{n-1}{2n-1} \times \dots \times \frac{1}{2n-(n-1)}$$

$$= \frac{n! \times n!}{(2n)(2n-1)\dots\times(n+1) \times n!}$$

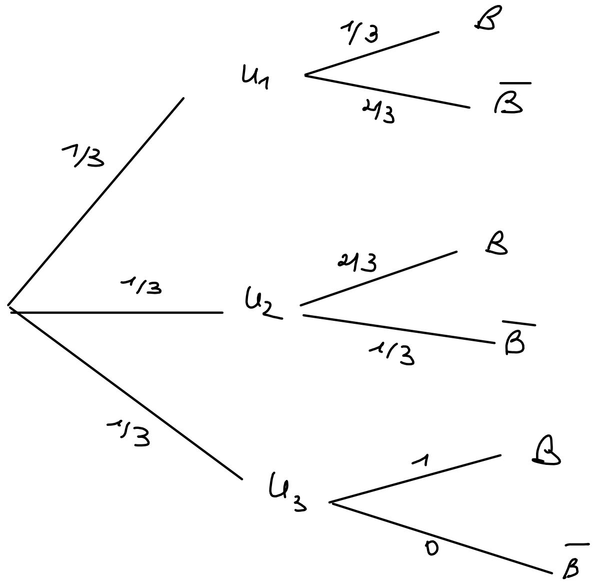
$$= \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

ADC 5



Notons U_k : " on choisit l'urne k "

B : " la boule est blanche ".



(U_1, U_2, U_3) est un système complet d'évènements.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(U_1)\,P_{U_1}(B) + P(U_2)\,P_{U_2}(B) + P(U_3)\,P_{U_3}(B)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 1$$

$$= \frac{2}{3}.$$

2) On cherche $P_B(U_1)$.

D'après la formule de Bayes

$$P_B(U_1) = \frac{P(U_1)\,P_{U_1}(B)}{P(B)}$$

$$= \frac{1/3 \times 1/3}{2/3}$$

$$= \frac{1}{6}.$$