

Interrogation du 05/01/2021

NOM Prénom :

/10

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les produits possibles avec les matrices
- A
- ,
- B
- et
- X
- .

/2

Les seuls produits possibles sont

$$BA = \begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -9 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } AX = \begin{pmatrix} -11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

2. Donner la transposée de
- A
- .

/1

$${}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. La matrice
- B
- est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

/2

$$\det(B) = 2 \times (-2) - 1 \times 3 = -7 \neq 0$$

donc B est inversible et

$$B^{-1} = \frac{-1}{-7} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 & 3/7 \\ 1/7 & -2/7 \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit } P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Calculer
- P^2

/1

$$P^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4 I_3.$$

5. En déduire que P est inversible et donner son inverse.

/1

$$P^2 = 4 I_3 \text{ donc } P \times \frac{1}{4} P = I_3$$

$$\text{donc } P \text{ est inversible et } P^{-1} = \frac{1}{4} P.$$

6. Donner l'ensemble des solutions du système

/3

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y + 3z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y + 3z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases} \quad \begin{matrix} l_2 \leftarrow l_2 - 3l_3 \\ l_3 \leftarrow l_3 - l_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ -x - 5y = -7 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases} \quad \begin{matrix} l_2 \leftarrow l_2 + l_1 \\ l_3 \leftarrow l_3 - l_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ -6y = -6 \\ 3y + z = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\{(2, 1, -1)\}$.