6 min

Interrogation du 12/10/2020

NOM Prénom : **/10**

1. Déterminer la limite en $+\infty$ de $u : x \mapsto x^5 - \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x$. **/2**

$$u(x) = e^{2x}\left(\frac{x^5}{e^{2x}} - 1 + \frac{1}{e^x}\right)$$

Or $\frac{x^5}{e^{2x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par croissance comparée

$e^{2x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, $\frac{1}{e^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Par somme et produit , $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = -\infty$.

2. Déterminer la limite en 0 de $h : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{2x}$. **/2**

$h(x) = \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ par taux d'accroissement usuel.

3. Calculer $P(X+2)$ où $P = X^2 + 3X$. **/1**

$$\begin{aligned} P(X+2) &= (X+2)^2 + 3(X+2) \\ &= X^2 + 4X + 4 + 3X + 6 \\ &= X^2 + 7X + 10 \end{aligned}$$

4. Donner la définition de $\mathbb{R}_n[X]$. **/1**

$\mathbb{R}_n[X] = \{ P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \leq n \}$

Tournez la page ➔

Dans toute la suite, on pose $\boxed{P = 2X^4 + 9X^3 + 9X^2 - X - 3}$.

5. Montrer que -1 est racine de P. **/1**

$P(-1) = 2(-1)^4 + 9(-1)^3 + 9 \times (-1)^2 - (-1) - 3$

$= 2 - 9 + 9 + 1 - 3 = 0$ donc -1 est racine de P

6. Poser la division euclidienne de P par $(X+1)^2$. **/2**

$(X+1)^2 = X^2 + 2X + 1$

$$
\begin{array}{r|l}
2X^4 + 9X^3 + 9X^2 - X - 3 & X^2 + 2X + 1 \\
\hline
-(2X^4 + 4X^3 + 2X^2) & 2X^2 + 5X - 3 \\
5X^3 + 7X^2 - X - 3 & \\
-(5X^3 + 10X^2 + 5X) & \\
-3X^2 - 6X - 3 & \\
-(-3X^2 - 6X - 3) & \\
0 &
\end{array}
$$

7. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$ (au maximum). **/2**

$P = (X+1)^2 (2X^2 + 5X - 3)$

$\Delta(2X^2 + 5X - 3) = 25 + 24 = 49 = 7^2$

Les racines de $2X^2 + 5X - 3$ sont

$x_1 = \frac{-5-7}{4} = -3$ et $x_2 = \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2}$

$$\boxed{P = 2(X+1)^2 (X+3)\left(X - \frac{1}{2}\right)}$$