Interrogation du 28/09/2020

NOM Prénom : **/10**

Cours

1. Énoncer les formules d'Euler. **/2**

$\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Calculs

2. Déterminer la forme exponentielle de $z_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$ **/2**

$|z_1| = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$

Soit θ un argument de z_1.

$\cos(\theta) = \dfrac{Re(z_1)}{|z_1|} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$\sin(\theta) = \dfrac{Im(z_1)}{|z_1|} = \dfrac{-2\sqrt{3}}{4} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $\theta = -\pi/3$ convient.

$$\boxed{z = 4e^{-i\pi/3}}$$

3. Déterminer la forme algébrique de $z_2 = \dfrac{5+i}{i-2}$. **/1.5**

$z_2 = \dfrac{(5+i)(-i-2)}{(i-2)(-i-2)}$

$= \dfrac{-5i - 10 + 1 - 2i}{(-2)^2 + 1^2}$

$= \dfrac{-9 - 7i}{5}$

$= -\dfrac{9}{5} - \dfrac{7}{5}i$

4. Déterminer la forme algébrique de $z_3 = (1+i)^8$. **/1.5**

$1+i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

$z_3 = \left(\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}\right)^8 = (\sqrt{2})^8 \quad e^{i\pi/4 \times 8} \quad = 2^4 \times e^{2i\pi} = 2^4 \times 1 = 16$

ou

$(1+i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$

$(1+i)^8 = \left((1+i)^2\right)^4 = (2i)^4 = 2^4 \times i^4 = 2^4 \times 1 = 16$

5. Déterminer la forme algébrique de $z_4 = e^{-i\pi} + 3\, e^{i\frac{\pi}{2}} + \frac{5}{3}$. **/1**

$z_4 = -1 + 3i + \frac{5}{3}$ $\qquad e^{-i\pi} = -1$

$z_4 = \frac{2}{3} + 3i$ $\qquad e^{i\pi/2} = i$

6. Simplifier $f(x) = \frac{\frac{4}{5}x^2}{8x\sqrt{x}}$ pour $x > 0$. **/1**

$f(x) = \frac{4}{5} x^2 \times \frac{1}{8x\sqrt{x}} = \frac{\cancel{4} \times x^{\cancel{2}}}{5 \times \cancel{4} \times 2 \times \cancel{x} \sqrt{x}} = \frac{x}{10\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{10}$ (voir interro 1)

ou

$f(x) = \frac{4}{5} x^2 \times \frac{1}{8x\sqrt{x}} = \frac{4}{5 \times 4 \times 2} \times \frac{x^2}{x^1 \times x^{1/2}} = \frac{1}{10} \times \frac{x^2}{x^{3/2}} = \frac{1}{10} \times x^{2-3/2} = \frac{1}{10} \times x^{1/2} = \frac{\sqrt{x}}{10}$.

7. Calculer la dérivée de $g : x \mapsto \tan(e^{2x} + 1)$, sans chercher l'ensemble de définition ou de dérivabilité. **/1**

$g'(x) = (2e^{2x} + 1)\left(1 + \tan^2(e^{2x} + x)\right)$

$= \frac{2e^{2x} + 1}{\cos^2(e^{2x} + x)}$

(voir interro 1 pour les explications)