Programme de colle des semaines 9 et 10

9 au 20 novembre 2020

AN3 Limites de fonctions

Prérequis : chapitre AN1 - Étude de fonctions, fonctions usuelles

1. **Notion de limite**
   - ▷ Définitions. Unicité de la limite. Limites à droite et à gauche.
   - ▷ Opérations sur les limites.
   - ▷ Limite d'une composée. Si f admet une limite ℓ en x_0 et si (u_n) est une suite réelle définie sur I et tendant vers x_0, alors $(f(u_n))$ tend vers ℓ. Application : cos n'a pas de limite en $+\infty$.
   - ▷ À connaître : limites des fonctions usuelles
     Croissances comparées :
     $$\forall \alpha,\beta>0,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{(\ln(x))^\beta}=+\infty;\ \lim_{x\to0^+}x^\alpha(\ln(x))^\beta=0;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\beta x}}{x^\alpha}=+\infty;\ \lim_{x\to-\infty}x^\alpha\,\mathrm{e}^{\beta x}=0.$$
     Taux d'accroissement usuels :
     $$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;\ \lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1;\ \lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}=1;\ \lim_{x\to0}\frac{\cos(x)-1}{x}=0;\ \lim_{x\to0}\frac{\tan(x)}{x}=1.$$
   - ▷ Passage à la limite dans une inégalité.
2. **Théorèmes d'existence de limites**
   - ▷ Existence d'une limite par encadrement, majoration ou minoration.
   - ▷ Théorème de la limite monotone : Toute fonction monotone sur $]a,b[$ $(-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty)$ admet des limites à droite et à gauche en tout point de $]a,b[$. Comportement en a et b.

Méthodes du chapitre

- ▷ **Calculer une limite** à partir des limites usuelles.
- ▷ Étudier la limite d'une fonction définie en plusieurs morceaux.
- ▷ Poser $h=x-a$ (a réel) pour se ramener à une limite en 0.
- ▷ Calculer une limite par encadrement/majoration/minoration.

AL3 Polynômes

1. **Définition de $\mathbb{K}[X]$**
   - ▷ Polynôme, ensemble $\mathbb{K}[X]$ (avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), application polynomiale associée à un polynôme P (on confondra les deux notions).
   - ▷ Opérations : combinaison linéaire, produit, puissance, composition, dérivation.
2. **Degré d'un polynôme**
   - ▷ Définition. Le degré du polynôme nul est $-\infty$. Coefficient dominant/terme dominant d'un polynôme non nul. Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$.

- ▷ Degré de $P^{(k)}$, $P+Q$, de λP, de PQ, de P^n, de $P(Q(X))$.

3. **Division euclidienne**
   - ▷ Vocabulaire : multiple, diviseur
   - ▷ Théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$. CNS de divisibilité.

4. **Racines**
   - ▷ Définition. a est racine de P si et seulement si $X-a$ divise P.
   - ▷ Multiplicité. a est racine de multiplicité m si et seulement si $P=(X-a)^m Q$ avec $Q(a)\neq 0$.
   - ▷ Si $P\in\mathbb{K}_n[X]$ admet $n+1$ racines (deux à deux distinctes ou comptées avec multiplicité), alors $P=0$. Si $P\in\mathbb{K}[X]$ admet une infinité de racines, alors $P=0$. Autrement dit, un polynôme non nul, de degré $n\in\mathbb{N}$ admet au plus n racines (comptées avec multiplicité).

5. **Factorisation**
   - ▷ Dans $\mathbb{C}[X]$: théorème de d'Alembert-Gauss. Tout polynôme non constant se factorise en produit de polynômes de degré 1. Exemple de X^n-1.
   - ▷ Dans $\mathbb{R}[X]$: Tout polynôme non constant se factorise en produit de polynômes de degré 1 ou de degré 2 à discriminant strictement négatif. Exemple de factorisation en passant par une factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.

Méthodes du chapitre

- ▷ Calculer une somme, un produit, une composée de polynômes.
- ▷ Donner le degré d'un polynôme.
- ▷ Poser une division euclidienne.
- ▷ Déterminer le reste de X^n par un polynôme de degré 2 (méthode vue en TD).
- ▷ Montrer que a est racine de P et déterminer sa multiplicité en utilisant des divisions euclidiennes.
- ▷ Factorisation de polynômes.
  - méthode usuelles : facteur commun, identités remarquables ;
  - factorisation des polynômes du second degré ;
  - trouver une racine « évidente » ; en déduire une factorisation.

Note aux colleurs :

- La caractérisation de la multiplicité avec les dérivées n'a pas été vue.
- On se restreindra à des factorisations simples dans $\mathbb{C}[X]$ ou $\mathbb{R}[X]$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$. En l'abscence de racine évidente $(-1, 1$ ou $0)$ on donnera des indications de départ.

Info Boucles for

1. Déjà vu : `+, -, *, /, ^, sqrt, exp, log, cos, sin, %e, %pi, input, disp, if`
2. Nouveau : boucles `for`.

Questions de début de colle

La colle débutera par une ou plusieurs questions dans la liste ci-dessous :

- Énoncé d'une définition ou d'une propriété du cours.
- Exercice du cours : Étudier la limite de $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0.
- Exercice du cours : Démontrer que la fonction cosinus n'a pas de limite en $+\infty$.
- Exercice du cours : Soient $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$. Montrer que si $P(a_k) = Q(a_k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, alors $P = Q$.
- Informatique : écrire un programme comportant une boucle for.
  - Écrire un programme qui affiche le terme de rang n d'une suite récurrente d'ordre 1.
  - Écrire un programme qui calcule une somme simple.