Programme de colle S6

5 au 9 octobre 2020

AL1 Nombres complexes

1. **Nombres complexes**
   - ▷ Forme algébrique, partie réelle, partie imaginaire, addition, multiplication, produit, quotient. Conjugué.
2. **Module et arguments**
   - ▷ Interprétation géométrique : plan complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.
   - ▷ Module d'un nombre complexe. Propriétés. Inégalité triangulaire.
   - ▷ Nombres complexes de module 1, forme trigonométrique, écriture $\mathrm{e}^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$). Formules de Moivre et d'Euler. Application : linéarisation d'expressions trigonométriques.
   - ▷ Argument d'un nombre complexe non nul. Formes trigonométrique et exponentielle.

$$\forall r, r' > 0, \quad \theta, \theta' \in \mathbb{R}, \quad r\,\mathrm{e}^{i\theta} = r'\,\mathrm{e}^{i\theta'} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \theta = \theta' + 2k\pi \end{cases}$$

   - ▷ Exemples de résolutions d'équations en utilisant la forme exponentielle : $z^2 = \alpha$, $z^n = 1$. *On ne cherche pas à déterminer le nombre de solutions de ces équations.*

Méthodes du chapitre

- ▷ Écrire un nombre complexes sous plusieurs formes.
- ▷ Linéariser une expression trigonométrique.
- ▷ Résoudre des équations simples dans $\mathbb{C}$. En particuler, les équations du second degré à coefficients dans $\mathbb{R}$ et les cas où se ramène à identifier la partie réelle et la partie imaginaire.
- ▷ Résoudre une équation du type $z^n = \alpha$, avec α sous forme exponentielle.
  Note aux colleurs : la méthode résolution de $z^2 = \alpha$ sous forme algébrique n'est pas connue des étudiants.

AN2 Suites réelles

1. **Raisonnement par récurrence** (simple, double)
2. **Notion de suite**
   - ▷ Définition. Exemples de définition d'une suite : terme général explicite, par récurrence ou de manière implicite (avec le théorème de la bijection)
   - ▷ Opérations.
   - ▷ Étude qualitative : monotonie, suite majorée/minorée/bornée. Borne inférieure/supérieure. Maximum/minimum.
3. **Exemples classiques**
   - ▷ Suites arithmétiques et géométriques : relation de récurrence, terme général, monotonie.
   - ▷ Suites arithmético-géométriques : définition, détermination du terme général.

▷ Suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients réels. Équation caractéristique. Terme général.

4. **Limite d'une suite réelle**

▷ Suite convergeant vers un réel ℓ. Suites divergentes. Suites divergentes tendant vers l'infini. Unicité de la limite.

▷ Opérations algébriques. Passage à la limite dans une inégalité.

▷ Théorème d'encadrement, d'existence de limite infinie par majoration/minoration.

▷ Théorème de la limite monotone.

▷ Suites adjacentes. Théorème des suites adjacentes.

▷ Exemples de suites extraites. Si (u_n) a une limite, toutes ses suites extraites ont la même limite (en particulier la suite (u_{n+1})).

▷ Comparaisons des suites (n^a), (q^n), $(\ln(n)^b)$.

Méthodes du chapitre

▷ Rédiger un raisonnement par récurrence (simple ou double) ou par l'absurde.

▷ Étudier la monotonie d'une suite.

▷ Reconnaître/déterminer le terme général d'une suite arithmétique, d'une suite géométrique, d'une suite arithmético-géométrique ou d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

▷ Calculer des limites par opérations sur les limites usuelles.

▷ Suites récurrentes : l'étude sera guidée. Savoir utiliser le théorème de la limite monotone et, le cas échéant, calculer la limite.

▷ Démontrer que deux suites sont adjacentes.

Notes aux colleurs *:Les sommes $\sum$ et produits $\prod$ (en particulier $n!$) n'ont pas encore été vues. Évitez les suites implicites, nous n'avons pas encore fait d'exemples en cours.*

Questions de début de colle

La colle débutera par une ou plusieurs questions dans la liste ci-dessous :

- **Calcul**. *Un calcul sera posé en début de colle (simplification, calcul littéral, fractions, puissances, dérivées, ...tout est possible).*
- *Énoncé d'une définition ou d'une propriété du cours.*
- *Linéarisation de $\cos^2(x)$ et $\sin^2(x)$ (deux méthodes vues).*
- *Résolution de $z^n = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque ou précisé (au choix de l'interrogateur – nous avons traité le cas $n = 3$ et le cas général en cours).*
  Remarque : pas de discussion sur le nombre de solutions de cette équation.
- *(Exemple du cours). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle telle que $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Démontrer par* ***récurrence double*** *que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1 + 2^n$.*
- *(Exemple du TD) : étudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$.*