Programme de colle des semaines 11 et 12

23 novembre au 4 décembre 2020

AN4 Continuité

Prérequis : chapitres AN1 et AN3 (Études de fonctions - Limites)

1. **Continuité**
   - ▷ Continuité en un point, sur un intervalle. Continuité à gauche, à droite.
   - ▷ Opérations sur les fonctions continues. Composition.
   - ▷ Prolongement par continuité en un point.
   - ▷ Théorème des valeurs intermédiaires.
2. **Bijectivité**
   - ▷ Fonctions réalisant une bijection de I sur J : définition, représentation graphique de la réciproque.
   - ▷ Théorème de la bijection continue : Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I définit une bijection de I sur un intervalle J que l'on peut donner. La bijection réciproque associée est elle-même continue sur J et a le même sens de variation que f.
   - ▷ Fonction arc-tangente : définition, valeurs remarquables, limites, variations. La dérivée a été donnée sans démonstration, elle peut être utilisée.

Méthodes du chapitre

- ▷ **Étudier la continuité d'une fonction.**
- ▷ Montrer qu'une fonction peut être prolongée par continuité en un point.
- ▷ Montrer qu'une fonction réalise une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J à déterminer.
- ▷ Dresser le tableau de variation de la réciproque associée.
- ▷ Étudier une fonction où Arctan intervient.

AL4 Ensembles et applications

1. **Vocabulaire ensembliste**.
   - ▷ Appartenance. Inclusion. Notations $\in$, $\subset$.
   - ▷ Complémentaire. Notation $\overline{A}$. Ensemble $A \setminus B$. $\cap$, $\cup$. Lois de De Morgan.
2. **Applications**
   - ▷ Définition. Vocabulaire : image, antécédént.
   - ▷ Ensemble image d'une application (notation $f(E)$ ou $\mathrm{Im}(f)$).
   - ▷ Composée de deux applications.
   - ▷ Applications injectives, surjectives, bijectives. Application réciproque d'une bijection.
   - ▷ Une fonction strictement monotone est injective.

Méthodes du chapitre

Aux colleurs : On prendra des exemples issus soit de l'analyse (étude de fonctions) soit de l'algèbre linéaire (dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$).

- ▷ Montrer une inclusion de deux ensembles.
- ▷ Montrer l'égalité de deux ensembles donnés : par équivalence (quand c'est possible - résolution d'équations) ou par double-inclusion.
- ▷ Méthodes spécifiques aux fonctions :
  - Savoir lire les informations ($f(I)$, injectivité, surjectivité) dans le tableau de variation.
  - Montrer qu'une fonction réalise une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J à déterminer.
- ▷ Méthodes dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$:
  - Déterminer les antécédents d'un élément par une application.
  - Montrer qu'une application est bijective et déterminer son application réciproque.
  - (Plus difficile) Démontrer par double inclusion que $\mathrm{Im}(f) = ...$ (résultat donné).

Remarque : Pour les applications non injectives ou non surjectives, on se limitera à des exemples simples où on peut facilement trouver un contre-exemple.

Info Boucles for et while

1. Déjà vu : `+, -, *, /, ^, sqrt, exp, log, cos, sin, %e, %pi, input, disp, if`
2. Nouveau : boucles `for` et `while`.

Questions de début de colle

La colle débutera par une ou plusieurs questions dans la liste ci-dessous :

- Énoncé d'une définition ou d'une propriété du cours.
- Exercice de cours (ceci peut constituer un premier exercice).
  1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\cos(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution $u_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
  2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et tend vers $\dfrac{\pi}{2}$ (on utilisera une fonction réciproque adaptée).
- Exercice de cours : Montrer que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x + 1\} = \{(a + 1, 3a + 4), a \in \mathbb{R}\}$ par double inclusion.
- Démonstration : Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont bijectives, alors $g \circ f : E \to G$ est également bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
- Informatique : écrire un programme comportant une boucle for.
  - Écrire un programme qui affiche le terme de rang n d'une suite récurrente d'ordre 1.
  - Écrire un programme qui déterminer le premier $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n vérifie ...