DEVOIR SURVEILLÉ 3

Vendredi 4 décembre 2020 - 4h

Le sujet comporte 5 exercices indépendants, qui peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1

Questions en vrac

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit $f\colon \begin{array}{ccl} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{x-1}\right) & \text{si } x<1 \\ \ln(x)\times\ln(\ln(x)) & \text{si } x>1 \end{cases} \end{array}$.
   (a) Écrire un programme Scilab qui demande à l'utilisateur de saisir un réel $x \neq 1$ puis calculer et affiche la valeur de $f(x)$.
   (b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
   (c) Cette fonction est-elle prolongeable par continuité en 1 ? Si oui, on précisera quelle valeur poser pour $f(1)$.

2. Étudier $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \ln\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)$.

3. Déterminer l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \text{ tel que } P'(X) = P(X+1)+X^2\}$.

4. On considère l'application $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $g(n) = 2n$.
   L'application g est-elle injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$? surjective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$? bijective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$? Justifier.

Exercice 2

Un jeu de cartes comporte 32 cartes. On choisit simultanément 5 cartes qui forment une main. On rappelle qu'un tel jeu contient : 8 cœurs, 8 carreaux, 8 trèfles et 8 piques et que chacune de ces familles contient un as, un roi, une dame, un valet, un 10, un 9, un 8 et un 7.

1. Modéliser cette expérience : on décrira l'univers, on donnera son cardinal et on précisera si on peut le munir d'une probabilité uniforme ou non.
   Pour les questions suivantes, on pensera à définir les événements utilisés. Tout calcul sera justifié.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir exactement 4 cœurs.
3. Déterminer la probabilité d'obtenir exactement 2 rois.
4. Déterminer la probabilité d'obtenir exactement 4 cœurs et 2 rois.
5. Déterminer la probabilité d'obtenir exactement 4 cœurs ou exactement 2 rois.

Exercice 3

Soit g la fonction définie pour tout réel x par

$$g(x) = (4x^3 + 12x^2 + 21x + 22)\,\mathrm{e}^{-x}\,.$$

1. Soit P le polynôme de $\mathbb{R}[X]$, défini par $P = 4X^3 - 3X + 1$.
   Montrer que -1 est racine de P et déterminer une factorisation (complète) de P dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que $g'(x) = -P(x)\,\mathrm{e}^{-x}$ pour tout réel x.
4. Dresser le tableau de variation complet de g.
5. La fonction g est-elle surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Justifier précisément.
6. La fonction g est-elle injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Justifier précisément.

Exercice 4

On considère une urne U contenant deux boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher, ainsi qu'une urne V contenant une boule blanche et trois boules noires indiscernables au toucher.
On effectue une série de tirages d'une boule en procédant comme suit :

- le premier tirage a lieu dans U ;
- tous les tirages s'effectuent avec remise de la boule piochée dans l'urne dont elle provient ;
- si l'on pioche une boule blanche lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans l'autre urne ;
- si l'on pioche une boule noire lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans la même urne.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on notera

- U_n l'événement « le n-ième tirage s'effectue dans l'urne U » ;
- V_n l'événement « le n-ième tirage s'effectue dans l'urne V » ;
- B_n l'événement « la n-ième boule est blanche » ;
- N_n l'événement « la n-ième boule est blanche ».

On a $P(U_1) = 1$.

1. (a) Calculer $P(U_2)$.
   (b) Calculer $P(U_3)$.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir trois boules blanches lors des trois premiers tirages.
3. Une personne arrive à l'issue du deuxième tirage et sait simplement que la boule qui vient d'être tirée est blanche. Quelle est la probabilité que le deuxième tirage ait eu lieu dans l'urne U ?
4. (a) Démontrer en utilisant la formule des probabilités totales que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$P(U_{n+1}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}P(U_n)$$
   (b) Écrire alors un programme Scilab qui demande de saisir un entier $n \in \mathbb{N}^*$ puis affiche la valeur de $P(U_n)$, en utilisant cette relation.
5. Déterminer alors la valeur de $p_n = P(U_n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
6. Déterminer $P(B_n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 5

On considère la fonction $f\colon \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^x & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases} \end{array}$

Partie 1

1. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$.
2. Étudier la continuité de f sur $[0,+\infty[$.
3. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation, limites incluses.
4. (a) Montrer que f réalise une bijection de $I=\left[0,\dfrac{1}{e}\right]$ dans un intervalle J à préciser.
   On notera $h : J \to I$ la réciproque associée.
   (b) Étudier la continuité de h et dresser le tableau de varition complet de h sur J.
5. (a) Justifier que, pour tout $y \in \left[\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{e}}},1\right[$, on a : $\quad h(y)^{h(y)}=y$.
   (b) En déduire $\displaystyle\lim_{y\to 1^-}\frac{h(y)}{\ln(y)}$.

Partie 2

1. (a) Montrer que $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
   (b) Justifier que $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqslant\dfrac{3}{4}$.
   (c) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)\leqslant 1-\dfrac{1}{4n}\leqslant 1$.
2. Justifier que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'équation $f(x)=1-\dfrac{1}{4n}$ admet une unique solution u_n dans $\left[0,\dfrac{1}{e}\right]$.
3. Exprimer u_n à l'aide de h puis déterminer la monotonie et la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.