DEVOIRSURVEILLÉ 3 – CORRIGÉ

Exercice 1

1. (a)

```
x = input('Saisir un réel x différent de 1 :')
if x > 1 then
    y = exp(1/(x-1))
elseif x < 1 then
    y = log(x)*log(log(x))
end
disp(y, 'f(x) = ')
```

(b) • $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ est rationnelle donc continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ donc sur $]-\infty, 1[$. Puisque exp est continue sur $\mathbb{R}$, alors f est continue qur $]-\infty, 1[$ par composée.

• $x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc sur $]1, +\infty[$ et pour $x \in]1; +\infty[$, $\ln(x) \in]0, +\infty[$. Ainsi, par composée, $x \mapsto \ln(\ln(x))$ est continue sur $]1, +\infty[$. Enfin, par produit, f est continue sur $]1, +\infty[$.

Conclusion : $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \setminus \{1\}.}$

(c) • Si $x < 1$, $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$. Or $x - 1 \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} 0^-$ donc $\dfrac{1}{x-1} \underset{x \to 1-}{\longrightarrow} -\infty$. Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$, on a par composée

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0.$$

• Si $x > 1$, $f(x) = \ln(x)\ln(\ln(x))$. On a une forme indéterminée. Posons $h = \ln(x) \underset{x \to 1^+}{\longrightarrow} 0^+$.

$$f(x) = \ln(x)\ln(\ln(x)) = h\ln(h) \underset{h \to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée. Donc

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0.$$

Conclusion : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0 \in \mathbb{R}$

$\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en 1 en posant } f(1) = 0.}$

2. Posons $h = \dfrac{2}{x^2} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$x^2 \ln\left(1 + \frac{2}{x^2}\right) = \frac{2}{h}\ln(1+h) = 2 \times \frac{\ln(1+h)}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 2 \times 1$$

par taux d'accroissement usuel.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} x^2 \ln\left(1 + \frac{2}{x^2}\right) = 2.}$$

3. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$\begin{aligned}
P \in E &\Leftrightarrow P'(X) = P(X+1) + X^2 \\
&\Leftrightarrow 2aX + b = a(X+1)^2 + b(X+1) + c + X^2 \\
&\Leftrightarrow 2aX + b = (a+1)X^2 + (2a+b)X + (a+b+c) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = a+1 \\ 2a = 2a+b \\ b = a+b+c \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow P = -X^2 + 1
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{E = \{-X^2 + 1\}}$.

4. **Injectivité :** Soient $n, n' \in \mathbb{N}$ tels que $g(n) = g(n')$. Alors $2n = 2n'$ et donc $n = n'$. $\boxed{\text{L'application } g \text{ est donc injective.}}$

Surjectivité : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(n) = 2n$ est pair donc, par exemple, 1 n'a pas d'antécédent par g. $\boxed{\text{L'application } g \text{ n'est pas surjective.}}$

Bijectivité : Puisque g n'est pas surjective $\boxed{\text{elle n'est pas bijective}}$.

Exercice 2

1. Modélisation : l'univers Ω est l'ensemble des parties à 5 éléments de l'ensemble des cartes. On a : $\mathrm{Card}(\Omega) = \binom{32}{5}$. On le munit de la probabilité uniforme car tous les tirages sont équiprobables.

2. Soit A :« Obtenir exactement 4 cœurs ». Pour obtenir une main de A :

   - on choisit 4 coeurs parmi les 8 disponibles, sans ordre particulier. Il y a $\binom{8}{4}$ possibilités.
   - Puis, on choisit la dernière cartes. Il y a 24 possibilités (on écarte les coeurs).

   On a donc $\mathrm{Card}(A) = 24\binom{8}{4}$

   $$\boxed{P(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{24\binom{8}{4}}{\binom{32}{5}}.}$$

3. Soit B :« Obtenir exactement 2 rois ». Pour obtenir une main de B :

   - on choisit 2 rois parmi les 4 disponibles, sans ordre particulier. Il y a $\binom{4}{2}$ possibilités.
   - Puis, on choisit les 3 autres cartes, qui ne doivent pas être des rois : il y a $\binom{28}{3}$ possibilités.

   On a donc $\mathrm{Card}(B) = \binom{4}{2}\binom{28}{3}$

   $$\boxed{P(B) = \frac{\mathrm{Card}(B)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{\binom{4}{2}\binom{28}{3}}{\binom{32}{5}}.}$$

4. On cherche $P(A \cap B)$. L'événement $A \cap B$ est « Obtenir le roi de coeur et 3 autres coeurs et 1 autre roi ». Pour obtenir une main de $A \cap B$:

   - on prend le roi de coeur ;
   - puis, on choisit 3 coeurs parmi les 7 restant. Il y a $\binom{7}{3}$ possibilités.
   - Puis, on choisit la deuxième roi : il y a 3 possibilités

   On a donc $\mathrm{Card}(A \cap B) = 3\binom{7}{3}$

   $$\boxed{P(A \cap B) = \frac{\mathrm{Card}(A \cap B)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{3\binom{7}{3}}{\binom{32}{5}}.}$$

5. On cherche $P(A \cup B)$.

   $$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{24\binom{8}{4} + \binom{4}{2}\binom{28}{3} - 3\binom{7}{3}}{\binom{32}{5}}}$$

Exercice 3

1. $P(-1) = 4 \times (-1)^3 - 3 \times (-1) + 1 = -4 + 3 + 1 = 0$, donc $\boxed{-1 \text{ est racine de } P.}$
   On en déduit que $X + 1$ divise P. Posons la division euclidienne.

   $$\begin{array}{r|l} 4X^3 - 3X + 1 & X + 1 \\ \cline{2-2} -(4X^3 + 4X^2) & 4X^2 - 4X + 1 \\ \cline{1-1} -4X^2 - 3X + 1 & \\ -(-4X^2 - 4X) & \\ \cline{1-1} X + 1 & \\ -(X + 1) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

   Ainsi, $P = (X+1)(4X^2 - 4X + 1)$. $\Delta(4X^2 - 4X + 1) = 0$ et $4X^2 - 4X + 1$ a pour racine double $\dfrac{1}{2}$ donc

   et donc $\boxed{P = 4(X+1)\left(X - \frac{1}{2}\right)^2.}$

   On pouvait aussi voir l'identité remarquable et donner directement :
   $P = (X + 1)(2X - 1)^2$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

   $$g(x) = 4\frac{x^3}{\mathrm{e}^x} + 12\frac{x^2}{\mathrm{e}^x} + 21\frac{x}{\mathrm{e}^x} + \frac{22}{\mathrm{e}^x}$$

   Or, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ par croissance comparée
   et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.}$

   Soit $x < 0$.

   $$g(x) = x^3\left(4 + \frac{12}{x} + \frac{21}{x^2} + \frac{22}{x^3}\right)\mathrm{e}^{-x}$$

Or, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4+\dfrac{12}{x}+\dfrac{21}{x^2}+\dfrac{22}{x^3}\right)=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x}=\lim\limits_{X\to+\infty}\mathrm{e}^{X}=+\infty$. Par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty.}$

3. $x\mapsto 4x^3+12x^2+21x+22$ est polynomiale donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x\mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par produit, $\boxed{g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (12x^2+24x+21)\,\mathrm{e}^{-x}+(4x^3+12x^2+21x+22)(-e^{-x})\\ &= (12x^2+24x+21-4x^3-12x^2-21x-22)\,\mathrm{e}^{-x}\\ &= (-4x^3+3x-1)\,\mathrm{e}^{-x}\end{aligned}$$

On a bien $\boxed{g'(x)=-P(x)\,\mathrm{e}^{-x} \text{ pour tout réel } x.}$

4. D'après la question 1, $g'(x)=-4(x+1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2\mathrm{e}^{-x}$. Puisque $\mathrm{e}^{-x}>0$, le signe de $g'(x)$ est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-4(x+1)$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x-\frac{1}{2})^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

De plus $g(-1)=9\,\mathrm{e}$, donc le tableau de variation de g est :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$9\,\mathrm{e}$	$\searrow$	0

5. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\leqslant 9\,\mathrm{e}$ donc par exemple l'équation $f(x)=30$ n'a pas de solution car $9\,\mathrm{e}\leqslant 9\times 3=27<30$. $\boxed{f \text{ n'est pas surjective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}}$.

6. Montrons que $f(x)=1$ a au moins deux solutions sur $\mathbb{R}$:

- Sur $]-\infty,-1[$, g est continue et $1\in]\lim\limits_{x\to-\infty}g(x),g(-1)[=]-\infty;9\,\mathrm{e}[$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $g(x)=1$ a au moins une solution sur $]-\infty,-1[$.
- De même, g est continue sur $]-1,+\infty[$ et $1\in]g(-1),\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)[=]9\,\mathrm{e},0[$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $g(x)=1$ a au moins une solution sur $]-1,+\infty[$.

On en déduit que $\boxed{f \text{ n'est pas injective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}}$.

Exercice 4

1. (a) Remarquons déjà que $P_{U_n}(B_n)=\dfrac{2}{3}$, $P_{U_n}(N_n)=\dfrac{1}{3}$, $P_{V_n}(B_n)=\dfrac{1}{4}$ et enfin $P_{V_n}(N_n)=\dfrac{3}{4}$.
Le premier tirage ayant lieu dans U, le deuxième aura lieu dans U si et seulement si on tire une boule noire au premier tirage. Ainsi, $U_2=U_1\cap N_1$. Donc
$$\boxed{P(U_2)=P(U_1)\times P_{U_1}(N_1)=1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}}$$

(b) (U_2,V_2) est un système complet d'événements non négligeables. D'après la formule des probabilités totales,
$$P(U_3)=P(U_2)P_{U_2}(U_3)+P(V_2)P_{V_2}(U_3)$$
Or, $P(U_2)=\dfrac{1}{3}$, donc $P(V_2)=1-P(U_2)=\dfrac{2}{3}$.
De plus, si U_2 est réalisé, la probabilité de réalisé le tirage 3 dans U est d'avoir tiré une boule noire au 2-ième tirage (pas de changement d'urne) : $P_{U_2}(U_3)=P_{U_2}(N_2)=\dfrac{1}{3}$.
De plus, si U_2 n'est pas réalisé, la probabilité de réalisé le tirage 3 dans U est d'avoir tiré une boule blanche au 2-ième tirage (changement d'urne) : $P_{V_2}(U_3)=P_{V_2}(B_2)=\dfrac{1}{4}$.
$$\boxed{P(U_3)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{18}}$$

2. On cherche $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$. D'après la formule des probabilités composées

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_2}(B_3) = P_{U_1}(B_1)P_{V_2}(B_2)P_{U_3}(B_3) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$$

car ici on commence dans l'urne U puis on change d'urne à chaque tirage.

$$\boxed{P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{1}{9}.}$$

3. On cherche $P_{B_2}(U_2)$. D'après la formule de Bayes

$$P_{B_2}(U_2) = \frac{P(U_2)P_{U_2}(B_2)}{P(B_2)}.$$

Or, $P(U_2) = \frac{1}{3}$, $P_{U_2}(B_2) = \frac{2}{3}$. Cherchons $P(B_2)$. D'après la formule des probabilités totales (comme en 1b)

$$P(B_2) = P(U_2)P_{U_2}(B_2) + P(V_2)P_{V_2}(B_2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{18}.$$

Donc

$$\boxed{P_{B_2}(U_2) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}{\frac{7}{18}} = \frac{4}{7}.}$$

4. (a) (U_n, V_n) est un système complet d'événements non négligeables. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(U_{n+1}) = P(U_n)P_{U_n}(U_{n+1}) + P(V_n)P_{V_n}(U_{n+1})$$

Or $P_{U_n}(U_{n+1}) = P_{U_n}(N_n) = \frac{1}{3}$ car, si U_n est réalisé, U_{n+1} signifie que l'on ne change pas d'urne.

$P_{V_n}(U_{n+1}) = P_{V_n}(B_n) = \frac{1}{4}$ car, si V_n est réalisé, U_{n+1} signifie que l'on change d'urne.

Donc

$$\boxed{P(U_{n+1}) = \frac{1}{3}P(U_n) + \frac{1}{4}(1 - P(U_n)) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}P(U_n)}$$

(b)

```
n = input('Saisir un entier naturel non nul n : ')
p = 1 // P(U1)
for k = 2:n  // ou k = 1:n-1
    p = 1/4 + 1/12*p
end
disp(p)
```

5. La suite (p_n) est arithmético-géométrique.

$$x = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}x \Leftrightarrow 12x = 3 + x \Leftrightarrow 11x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{11}$$

Posons alors $v_n = p_n - \frac{3}{11}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$v_{n+1} = p_{n+1} - \frac{3}{11} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}p_n - \frac{3}{11} = \frac{1}{12}\left(v_n + \frac{3}{4}\right)\frac{1}{44} = \frac{1}{12}v_n$$

La suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{12}$ et de premier terme $v_1 = p_1 - \frac{3}{11} = 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11}$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = \frac{8}{11}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}$.

On en déduit que $\boxed{p_n = v_n + \frac{3}{11} = \frac{8}{11}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} + \frac{3}{11}}$

6. En reprenant le raisonnement de la question 4a,

$$\begin{aligned} P(B_n) &= P(U_n)P_{U_n}(B_n) + P(V_n)P_{V_n}(B_n) \\ &= p_n \times \frac{2}{3} + (1 - p_n) \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{5}{12}p_n + \frac{1}{4} \\ &= \frac{5}{12}\left(\frac{8}{11}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} + \frac{3}{11}\right) + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{P(B_n) = \frac{40}{11}\left(\frac{1}{12}\right)^{n} + \frac{4}{11}}$$

Exercice 5

On considère la fonction $f\colon \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^x & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases} \end{array}$

Partie 1

1. Sur $]0,+\infty[$, $f(x) = x^x = \exp(x\ln(x))$. Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \exp(x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ donc par produit et composée, f est bien dérivable sur $]0,+\infty[$.

2. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ donc elle est continue sur $]0,+\infty[$.
En 0 : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ par croissance comparée donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \exp(x\ln(x)) = \exp(0) = 1$ par continuité de exp en 0. Puisque $f(0) = 1$, f est continue en 0.
Conclusion : $\boxed{f \text{ est continue sur } [0,+\infty[.}$

3. Soit $x > 0$,
$$f'(x) = (\ln(x)+1)\exp(x\ln(x))$$
Or, $\exp(x\ln(x)) > 0$ et
$$\ln(x) + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geqslant -1 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{1}{e}$$
Ainsi, $f'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \in [1/e,+\infty[$.
De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
On en déduit le tableau de variation suivant

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$\exp(-1/e)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. (a) f est continue et strictement décroissante (car $f'(x) \leqslant 0$ et $f'(x) = 0$ a un nombre fini de solutions) sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{1}{e}\right]$ donc, d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de I dans
$$J = [f(1/e), f(0)] = [\exp(-1/e), 1].$$
(b) D'après le théorème de la bijection toujours, h est continue sur J et strictement croissante sur J. De plus, $f(0) = 1$ donc $h(1) = 0$ et $f(1/\mathrm{e}) = \exp(-1/e)$ donc $h(\exp(-1/e)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

x	$\exp(-1/\mathrm{e})$		1
h	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

5. (a) Soit $y \in \left[\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{e}}}, 1\right[= J \setminus \{1\}$. Notons $x = h(y)$. On a $x > 0$ (car $y \neq 1$).
Or $(f \circ h)(y) = y$ avec $(f\circ h)(y) = f(h(y)) = f(x) = x^x$. donc $\boxed{h(y)^{h(y)} = y.}$
(b) Soit $y \in J \setminus \{1\}$. On a : $h(y)^{h(y)} = y$. En appliquant la fonction ln aux deux membres (strictement positifs car $J \subset]0,+\infty[$), on obtient
$$h(y)\ln(h(y)) = \ln(y) \text{ donc } \frac{h(y)}{\ln(y)} = \frac{1}{\ln(h(y))}$$
Or, $\lim\limits_{y\to 1} h(y) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$, donc
$$\lim_{y\to+\infty} \frac{h(y)}{\ln(y)} = 0.$$

Partie 2

1. (a)
$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^{1/4} = \frac{1}{4^{1/4}} = \frac{1}{(2^2)^{1/4}} = \frac{1}{2^1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$
(b) Par stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leqslant \frac{9}{16}.$$
Or $\dfrac{9}{16} \geqslant \dfrac{8}{16} = \dfrac{1}{2}$. Donc $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \dfrac{3}{4}}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. De manière évidente, $1 - \dfrac{1}{4n} \leqslant 1$. De plus, f étant décroissante sur $[0, 1/\mathrm{e}]$ et $\dfrac{1}{e} \geqslant \dfrac{1}{4}$ (car $e \leqslant 4$),

$$f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) \leqslant f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{3}{4}.$$

Or, $n \geqslant 1$ donc $\dfrac{1}{4n} \leqslant \dfrac{1}{4}$ donc $1 - \dfrac{1}{4n} \geqslant \dfrac{3}{4}$. Ainsi,

$$\boxed{f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) \leqslant 1 - \frac{1}{4n} \leqslant 1.}$$

2. D'après la question 4a, f réalise une bijection de $I = \left[0, \dfrac{1}{e}\right]$ sur $J = [\exp(-1/e), 1] = \left[f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right), 1\right]$. Or $1 - \dfrac{1}{4n} \in J$ (question précédente) donc l'équation $f(x) = 1 - \dfrac{1}{4n}$ admet une unique solution $u_n \in I = \left[0, \dfrac{1}{e}\right]$.

3. On a $\boxed{u_n = h\left(1 - \dfrac{1}{4n}\right)}$.

$$4(n+1) \geqslant 4n \quad \text{donc} \quad \frac{1}{4(n+1)} \leqslant \frac{1}{4n} \quad \text{donc} \quad 1 - \frac{1}{4(n+1)} \geqslant 1 - \frac{1}{4n}.$$

Puisque h est strictement décroissante sur J,

$$u_{n+1} \leqslant u_n.$$

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$ De plus, $1 - \dfrac{1}{4n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $h(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$ donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$